

Bewegung einzelner Partikeln im instationären Strömungsfeld

von

Paul-Richard Schöneborn

Erlangen 1973

1973 № 249



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548407_0060

Bewegung einzelner Partikeln im instationären Strömungsfeld

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt

von

Paul-Richard Schöneborn

Erlangen 1973

Bewegung einzelner Partikel im inhomogenen Strömungsfeld

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR-INGENIEUR



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 14.2. 1973
Tag der Promotion: 24.5. 1973
Dekan: Prof. Dr. rer. nat. G. Méinardus
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. O. Molerus
Prof. Dr. rer. nat. H. Hofmann

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik der Universität Erlangen-Nürnberg.

Dem Leiter des Instituts, Herrn Professor Dr.-Ing. O. Molerus, möchte ich besonders für sein Interesse an dieser Arbeit und für die Unterstützung während der Untersuchungen danken.

Herrn Professor Dr. rer. nat. H. Hofmann danke ich sehr für die Übernahme des Korreferates.

Weiterhin gilt mein Dank allen Mitarbeitern des Instituts, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere Herrn Ing. grad. Hartmut Schoenfeldt sowie Herrn Herbert Fink, Fräulein Rita Scheffler und Herrn Heinz Schneider.

0. <u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
1. Einleitung	1
2. Die Bewegungsgleichung	4
2.1 Der Widerstandsbeiwert	6
2.11 Stationärer Widerstandsbeiwert	6
2.12 Instationärer Widerstandsbeiwert	8
2.12.1 Zähle Strömung ($Re < 1$)	8
2.12.2 Ablösende Strömung ($Re > 1$)	10
3. Näherungslösung	18
3.1 Schleichende Strömung	23
3.2 Umströmung bei höheren Reynoldszahlen	24
3.21 Wechselnde Anströmung	24
3.22 Gleichgerichtete Anströmung	28
3.23 Gültigkeitsbereich der Lösungen	29
3.3 Andere Näherungslösungen	30
3.4 Diskussion	31
4. Versuche	37
4.1 Literaturübersicht	37
4.2 Der Versuchsaufbau	44
4.3 Das Meßverfahren	47
4.31 Die Abbildungsbeziehung	48
4.32 Die Auswertung	53
4.33 Fehlerbetrachtung	59
4.33.1 Der Abbildungsfehler	59
4.33.2 Der statistische Fehler	60
4.33.3 Der systematische Fehler	61
4.4 Versuchsergebnisse	62
4.41 Die Bewegungsbahn	63
4.42 Der Abbremsseffekt	66
4.42.1 Das System Kugel-Kugelnachlauf	68
4.42.2 Das Verhalten für Frequenzen unterhalb der natürlichen Frequenz	70
4.42.3 Das Verhalten in der Nähe der natürlichen Frequenz	71
4.42.4 Das Verhalten über den Synchroni- sationsbereich hinazs	72
4.43 Das Amplitudenverhältnis	74

5.	Ausblick auf die feststoffbeladene Strömung	76
6.	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	88
7.	Symbole	90
8.	Literaturverzeichnis	92
9.	Diagramme	101
10.	Anhang	112

1. Einleitung

In der Verfahrenstechnik sind Mehrphasenströmungen häufig anzutreffen. So liegen feststoffbeladene Strömungen z.B. in Sichtern und Zyklonen oder bei der pneumatischen und hydraulischen Förderung vor. Bekanntlich werden die Partikel beim Sedimenttransport durch die Turbulenz der Trägerströmung in Schwebelagehalten. Das gleiche gilt für den schwebenden Transport des Feststoffes bei der hydraulischen Förderung. Einen Zugang zur Beschreibung der Transportphänomene eröffnet die Dispersionsgleichung, die für die eindimensionale Feststoffausbreitung

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = \epsilon_p \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

lautet, mit c der Feststoffkonzentration sowie den physikalischen Parametern der zeitlich mittleren Sinkgeschwindigkeit $\bar{u}$ und der Partikeldiffusivität ϵ_p .

Turbulente Strömungen sind ihrem Wesen nach instationäre Vorgänge. Es lassen sich in einem turbulent strömenden Medium Gebiete mit einem einheitlichen Bewegungsablauf abgrenzen; die Bewegung dieser Turbulenzballen scheint regellos zu sein, wenigstens ist eine Gesetzmäßigkeit nicht zu erkennen. Bei Suspensionsströmungen werden die in einer Turbulenzzelle eingelagerten Partikel durch die Schwankungsbewegungen des Turbulenzballens instationär angeströmt und zum Teil mit dem "Eddy" fortbewegt. Im stationären Zustand wird der Betrag an ausfallendem Feststoff durch die Diffusion der in den Turbulenzballen eingelagerten Partikel ausgeglichen. Die turbulente Quervermischung von Turbulenzzellen wird durch die turbulente Scheinviskosität beschrieben und es ist nur zu verständlich, daß die Partikeldiffusivität ϵ_p in Verbindung mit der "Eddy-Viskosität" ϵ_f steht. Während man für die turbulente Scheinviskosität der feststofffreien Strömung auf die Karman-Prandtlsche Universalbeziehung zurückgreifen kann, verbietet sich ein derartiges Vorgehen für den suspendierten Feststoff wegen Fehlens einer analogen Beziehung. Die Sedimentations-

bewegung der Partikel bewirkt u.U. ein vorzeitiges Verlassen der Turbulenzzelle. Die Sinkgeschwindigkeit beeinflusst die Diffusionszeit und damit die Partikeldiffusivität. In turbulenten Transportprozessen sind daher $\bar{u}$ und ϵ_p nicht unabhängig voneinander zu betrachten.

In der Literatur wird häufig die Sinkgeschwindigkeit einer Partikel in einer turbulent strömenden Flüssigkeit $\bar{u}$ gleich der Sinkgeschwindigkeit in einer ruhenden Flüssigkeit w_f gesetzt. Diese Annahme ist nur für hinreichend kleine Reynoldszahlen gerechtfertigt. Für Reynoldszahlen, gebildet mit der Partikelabmessung, $Re > 1$ beeinflusst die instationäre turbulente Strömung, auch wenn die Langzeitmittelwerte konstant sind, die Sinkgeschwindigkeit ($\bar{u} \neq w_f$).

Die aus Konzentrationsprofilen berechneten Partikeldiffusivitäten ϵ_p sind wegen des Einflusses der mittleren Sinkgeschwindigkeit $\bar{u}$ auf das Profil kaum übertragbar; jedenfalls stehen die Versuchsergebnisse verschiedener Autoren, die die Partikeldiffusivität unter der Annahme $\bar{u} = w_f$ ermittelten, im Widerspruch zueinander [11].

Die mit der Strömung von Suspensionen verbundenen Probleme sind noch nicht hinreichend gelöst. J.O. Hinze [28] stellt in einem Übersichtsartikel zu dem turbulenten Feststofftransport fest, daß man der Wechselwirkung von turbulenter Strömung und Partikeln mehr Aufmerksamkeit schenken sollte und fordert grundlegende Untersuchungen ausgehend von definierten, vorzugsweise einfachen Strömungen mit einzelnen Partikeln. Einen Einblick in die komplizierte Wechselwirkung zwischen Turbulenzzelle und den darin befindlichen Feststoffteilchen gewinnt man, wenn die Bewegung einer Partikel im vertikal harmonisch pulsierenden Strömungsfeld verfolgt wird; eine einfache harmonische Bewegung stellt den einfachsten Fall einer zeitlich veränderlichen Bewegung des Turbulenzballens dar.

Ferner können aus dem Verhalten einer frei fallenden Kugel in einer pulsierenden Strömung Rückschlüsse auf die Bewegungsgleichung der Partikel unter instationären Bedingungen gezogen werden. Zur Lösung von Problemen des Wärme- und Stoffaustausches in turbulenten Strömungen, z.B. ein Brennstoffnebel in einer turbulenten Rohrströmung, wird die Kenntnis der Relativ-

geschwindigkeit zwischen Partikel und umgebendem Medium benötigt. Analog verhält es sich mit dem Energieverlust der Trägerströmung durch den mit der Relativgeschwindigkeit verbundenen Strömungswiderstand der Partikeln. Die Relativgeschwindigkeit der Phasen ist aber meßtechnisch in turbulent strömenden Flüssigkeiten nicht zugänglich. Eine Querverbindung zwischen dem Mittelwert ("root mean square"-Wert) der Relativgeschwindigkeit und der Turbulenzstruktur des Trägermediums ist mittels der Bewegungsgleichung der Partikel möglich. Für höhere Reynoldszahlen ist diese Bewegungsgleichung aber unbekannt.

Eine in einer schwingenden Flüssigkeit sedimentierende Kugel ist daneben im Hinblick auf verschiedene technische Verfahren interessant. So werden niederfrequente Flüssigkeitsschwingungen bei der Aufbereitung von Mineralien, in sogenannten Setzmaschinen, und bei der kontinuierlich betriebenen Solvent-Extraktion angewendet. Trotz dieser praxisbezogenen Anwendungen kennt man jedoch wenig über das Partikelverhalten in pulsierenden Strömungen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, einen Beitrag zur Beurteilung der Wechselwirkung zwischen Partikel und Flüssigkeit in einem zeitlich veränderlichen Strömungsfeld zu leisten. Ausgehend von einem auf bekannte Tatsachen aufbauenden Modell werden die zu erwartenden Effekte für ein sinusförmig pulsierendes Strömungsfeld näherungsweise analytisch berechnet. Die experimentellen Untersuchungen bestätigen die erwartete Verringerung der zeitlich mittleren Sinkgeschwindigkeit, zeigen andererseits aber auch, daß in bestimmten Bereichen mit Strömungszuständen gerechnet werden muß, die in keiner Weise durch das Modell erfasst werden können. Abschließend werden Aspekte erörtert, die sich für die Umströmung der Partikel bei höheren Reynoldszahlen in einem Turbulenzfeld ergeben.

2. Die Bewegungsgleichung

Im folgenden wird die translatorische Bewegung kugelförmiger Partikeln in einem zeitlich veränderlichen Strömungsfeld betrachtet. Auf ein in einer Flüssigkeit befindliches Feststoffteilchen wirken Feldkräfte und vom umgebenden Medium an der Partikelberandung übertragene Kräfte ein. Da die Bewegung der Partikel im Schwerfeld betrachtet wird, ist die zu berücksichtigende Feldkraft die Schwerkraft der Partikel: +)

$$\underline{G} = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot \rho_p \cdot \underline{g} \quad (2.1)$$

Das von der Partikel ungestörte Strömungsfeld weise in jedem Punkt des Raumes die gleiche Geschwindigkeit $\underline{v}(t)$ auf, die mithin nur eine Funktion der Zeit ist. Die Geschwindigkeit besitze nur in Richtung der Erdschwere eine von Null verschiedene Komponente $v(t)$. Die Geschwindigkeiten werden in Richtung des Schwerevektors positiv gezählt. Aus der Navier-Stokes-Gleichung für die vertikale Koordinate x_3 folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho_f \cdot g - \rho_f \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.2)$$

Auf ein nach dem Zeitgesetz $v(t)$ in der Flüssigkeit bewegtes Teilchen übt das Strömungsfeld die Kraft

$$\underline{A} = -(\rho_f \cdot \underline{g} - \rho_f \cdot \frac{d\underline{v}}{dt}) \cdot \frac{\pi}{6} d^3 \quad (2.3)$$

aus; denn wegen der dann gleichen Bewegung von Partikel und Flüssigkeit verschwindet die Relativgeschwindigkeit. Das Geschwindigkeitsfeld wird in keiner Weise durch die Anwesenheit des Feststoffteilchens verändert. Von der Flüssigkeit können nur Druckkräfte auf das Feststoffteilchen übertragen werden. Der erste Term in der Gleichung (2.2) ist der statische, der zweite Term der dynamische Auftrieb als Folge der beschleunigten Bewegung der Flüssigkeit.

Ein der Strömung überlassenes Feststoffteilchen wird sich aufgrund der unterschiedlichen Dichte von Feststoff und Flüssigkeit anders als die Flüssigkeit bewegen. Durch die Relativ-

+) Die Bedeutung der Formelzeichen und Symbole ist der Tabelle auf Seite 90/91 zu entnehmen.

geschwindigkeit des kugelförmigen Teilchens im Strömungsfeld werden Reibungskräfte in der Flüssigkeit geweckt, die zu einem Strömungswiderstand $\underline{W}$ der Kugel führen. Nach dem d'Alembert-Prinzip ergänzt die Trägheitskraft

$$\underline{T} = -\rho_p \frac{du}{dt} \frac{\pi}{6} d^3 \quad (2.4)$$

die Summe der äußeren Kräfte in der Bilanz zu Null. Da in einem vertikal pulsierenden Strömungsfeld die vektorielle Kräftebilanz

$$\underline{G} + \underline{A} + \underline{W} + \underline{T} = 0$$

nur für die vertikale Komponente eine Verknüpfung der physikalischen Größen ergibt, kann die vektorielle Gleichung durch die skalare Bilanz ersetzt werden.

Der Strömungswiderstand W für die instationäre Bewegung ist weitgehend unbekannt. In Anlehnung an den stationären Strömungswiderstandsbeiwert bezieht man die Widerstandskraft auf den mit der Relativgeschwindigkeit $u-v$ gebildeten dynamischen Druck und den Strömungsschatten der kugelförmigen Partikel.

$$c_{w,i} = \frac{W}{\frac{\rho}{2} (u-v)^2 \frac{\pi}{4} d^2} \quad (2.5)$$

Mit den Definitionen der Reynoldszahl und der Archimedes-Zahl wird die Bewegungsgleichung umgeformt.

$$\begin{aligned} Re &= \frac{(u-v) d}{\nu} \\ Ar &= \frac{4 g d^3}{3 \rho^2} \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$c_{w,i} \cdot |Re| \cdot Re + \frac{4 \rho_p}{3 \rho_f} \frac{d^2}{\nu} \frac{dRe}{dt} - Ar \left[1 - \frac{1}{9} \frac{dv}{dt} \right] = 0$$

Die Differentialgleichung beschreibt formal das Bewegungsverhalten eines kugelförmigen Teilchens in einem veränderlichen Strömungsfeld; auswertbar wird diese Gleichung erst, wenn der instationäre Widerstandsbeiwert als bekannte Funktion in diese Gleichung eingeführt wird.

2.1 Der Widerstandsbeiwert

Die allgemein für newtonsche Flüssigkeiten geltenden Navier-Stokes-Gleichungen sind nur in einigen wenigen Fällen, die eine weitreichende Vereinfachung des Strömungsproblems erlauben, gelöst worden. Auf experimentelle Untersuchungen über die von einem Strömungsmedium auf einen Körper ausgeübte Kraft kann nicht verzichtet werden .

2.11 Stationärer Widerstandsbeiwert

Der Widerstandsbeiwert einer mit konstanter Geschwindigkeit in einer ruhenden Flüssigkeit bewegten Kugel zählt zum klassischen Bestand der Strömungslehre. Aus den Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich die den Vorgang beschreibenden zwei dimensionslosen Kennzahlen, die Reynoldszahl Re und der Widerstandsbeiwert c_w , herleiten. Die Verknüpfung beider Kennzahlen

$$c_w = c_w(Re)$$

kann wegen der Kompliziertheit des Strömungsfeldes nur experimentell festgestellt werden.

Für die Berechnung von Teilchenbahnen z.B. in einem Sichter [57] wird, da die Reynoldszahl sich längs des Weges ändert, ein analytischer Ausdruck für den Widerstandsbeiwert benötigt. Im Schrifttum [8,16,42,66,74] finden sich Zusammenstellungen von Approximationsformeln für den stationären Widerstandsbeiwert. Eine in ihrem Aufbau durchsichtige Formel geht auf Kaskas zurück.

$$c_w = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt{Re}} + 0.4 \quad (2.7)$$

Der Anwendungsbereich erstreckt sich auf den unterkritischen Bereich, i.a. $Re \ll 2 \cdot 10^5$; der maximale relative Fehler beträgt 6 %. Genauere, einem engeren Reynoldszahl-Bereich angepasste Approximationen können dem Schrifttum entnommen werden.

Die Dimensionsanalyse des Strömungswiderstandes geht von einer konstanten Relativgeschwindigkeit zwischen der Kugel und dem Strömungsmedium aus. In der Nachlaufströmung der Kugel werden

ab $Re \sim 130$ periodische Bewegungen festgestellt, die eine pulsierende Kraft auf die Kugel ausüben. Bei Fallversuchen führt der Körper Querbewegungen aus, die wiederum das Strömungsfeld verändern. Zum Verständnis der in einem späteren Kapitel angeführten Versuchsergebnisse wird auf die Erscheinungsformen der Nachlaufströmung bei der stationären Kugelumströmung für $Re < 1000$ eingegangen.

Bis zu einer Reynoldszahl von 5 [75] bleibt die Strömung anliegend, mit zunehmender Reynoldszahl löst die Strömung ab und der Ablösepunkt wandert in Richtung des Staupunktes. Ab einer Reynoldszahl von ungefähr 24 bilden sich Wirbelringe im Nachlauf aus. Der Nachlauf vergrößert sich sackartig in Richtung der Anströmung. Pulsationen des Nachlaufes, die mit zunehmender Reynoldszahl anwachsen, werden ab einer Reynoldszahl von ca. 130 beobachtet. Nach Erreichen einer Reynoldszahl von 270 lösen sich einzelne Wirbel an der Kugel ab [25]. Die Wirbelablösung wird durch eine Instabilität an einer Stelle des Wirbelringes eingeleitet und setzt sich in Umfangsrichtung des Wirbels fort. Das Strömungsbild wird durch diesen Vorgang asymmetrisch.

Zum Aufbau eines Wirbels wird Energie benötigt. Ein zusätzlicher Widerstand des Körpers ist die Folge. Die periodische Wirbelablösung verursacht - auch wenn die Bewegung der Kugel mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt - einen schwankenden Widerstand. Nach Messungen von Fung [24] kann der Widerstand von Zylindern $\pm 15\%$ um den zeitlichen Mittelwert schwanken.

Die periodische Wirbelablösung wird als ein instationärer Vorgang durch die Strouhal-Zahl gekennzeichnet. Nach Goldburg und Florsheim [25] gilt für die Frequenz der Wirbelablösung f_{abl}

$$Str = \frac{f_{abl} \cdot d}{u_{rel}} = 0.387 \left(1 - \frac{270}{Re} \right) \quad (2.8)$$

Mit $u_{rel} = u - v$ wird die Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und dem Strömungsmedium bezeichnet.

Vom Standpunkt der Strömungslehre ist es unbefriedigend, daß der Widerstandsbeiwert nicht aus den Navier-Stokes- Gleichungen für $Re > 1$ analytisch berechnet werden kann. In den letzten Jahren versucht man diese Schwierigkeit durch numerische Integration der Navier-Stokes-Gleichungen zu umgehen. Die numerischen Verfahren setzen ein rotationssymmetrisches Strömungsfeld voraus. Die Ergebnisse der numerischen Rechnung sind deshalb nur für $Re < 270$ physikalisch sinnvoll. Der Widerstandsbeiwert konnte in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund vorausberechnet werden [64].

2.12 Der instationäre Strömungswiderstand

In einer beschleunigten, idealen Flüssigkeit erfährt ein umströmter Körper einen Widerstand. Gewöhnlich wird dieser Strömungswiderstand durch den Koeffizienten der scheinbaren Masse c_a gekennzeichnet, der das Verhältnis von Widerstand zu Trägheitskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmasse wiedergibt. Die Theorie [62] ergibt für die Bewegung einer Kugel in einer reibungsfreien Flüssigkeit

$$c_a = 1/2$$

2.12.1 Zähe Strömung ($Re < 1$)

Unter der Voraussetzung sehr geringer Relativgeschwindigkeiten zwischen der Kugel und der Flüssigkeit können die konvektiven Beschleunigungsterme in den Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigt werden. Die um diese Terme verkürzten Navier-Stokes-Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen. Stokes [73] berechnete zum erstenmal den Beschleunigungseinfluß auf den Widerstand einer Kugel für die spezielle Bewegung einer harmonischen Schwingung. Für den Koeffizienten der scheinbaren Masse c_a und dem Widerstandsbeiwert lautet sein Ergebnis

$$c_a = \frac{1}{2} + 9\sqrt{2} \cdot St \quad (2.9)$$

$$c_w = \frac{24}{|Re|} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2} St} \right) \quad (2.10)$$

In diesen Gleichungen bedeutet St die Stokes-Zahl, die zu

$$St = \sqrt{\frac{v}{\omega d^2}} \quad (2.11)$$

definiert ist. Basset [1, 2], Boussinesq [9] und Oseen [61] lösten die verkürzten Differentialgleichungen, die für eine sich mit hoher Beschleunigung, aber geringer Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit translatorisch bewegendende Kugel gelten, allgemein. Der von ihnen hergeleitete Ausdruck für die Widerstandskraft aufgrund der Wechselwirkung zwischen Strömungsfeld und der Kugel setzt sich aus drei Termen zusammen:

dem schon von Stokes für stationäre Strömungsverhältnisse hergeleiteten zähen Widerstand $c_w = 24/|Re|$,

dem aus der Theorie reibungsfreier Strömungen für instationäre Verhältnisse bekannten Koeffizienten der scheinbaren Masse c_a

und dem allgemein in der Literatur als Basset-Term bezeichneten Integralausdruck, der die gesamte Vorgeschichte der Bewegung erfaßt. Der instationäre Widerstandsbeiwert für die zähe Umströmung der Kugel beträgt:

$$c_{w,i} = \frac{24}{|Re|} + c_a \frac{4}{3} \cdot \frac{d^2}{\nu \cdot |Re| Re} \cdot \frac{d Re}{dt} + \\ + c_H \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{\nu}} \cdot \frac{1}{|Re| Re} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{t_0}^t \frac{\frac{d Re}{dt''}}{\sqrt{t-t''}} dt'' \quad (2.12)$$

Die Koeffizienten der scheinbaren Masse und des Basset-Terms betragen für die zähe Umströmung $c_a = 0.5$ bzw. $c_H = 6$.

L. Rayleigh [63] zeigte, daß die Ergebnisse von Stokes, Gl. (2.9) und Gl. (2.10), und Basset, Gl. (2.12), nur scheinbar im Widerspruch stehen. Rayleigh nutzte zu seinem Beweis die Linearität der partiellen Differentialgleichungen aus, um mittels Fourier-Transformation aus der von Stokes gefundenen Lösung für eine harmonische Schwingung den Widerstand für eine beliebige Bewegung zu berechnen. Rayleigh's Ergebnis deckt sich mit dem von Basset. - Die Berechnung des Widerstandes für eine harmonische Bewegung nach der Gleichung (2.12) ist leicht

durchzuführen. Die Vergrößerung der scheinbaren Masse und des Widerstandes nach den Gleichungen (2.9) und (2.10) geht also auf die Auflösung des Basset-Terms zurück.

2.12.2 Ablösende Strömung ($Re > 1$)

Für größere Reynoldszahlen ist nach den Erscheinungsformen der stationären Umströmung einer Kugel mit einer komplizierten Wechselwirkung zwischen dem Körper und dem Nachlauf für eine zeitlich veränderliche Anströmung zu rechnen. Bei einer oszillierenden Bewegung wird die Kugel während eines Bewegungsabschnittes in den eigenen Nachlauf hineinbewegt, während bei einer geradlinigen, gleichmäßigen Beschleunigung die Anströmung "gesund" bleibt. Der instationäre Strömungswiderstand kann nicht durch die kinematischen Größen von momentaner Geschwindigkeit und Beschleunigung allein beschrieben werden; experimentelle Ergebnisse des Widerstandes sind im allgemeinen nur für den untersuchten Bewegungsablauf gültig.

Torobin und Gauvin [78] kommen in ihrem Referat über die bis (1960) erschienenen Arbeiten über den Beschleunigungseinfluß auf den Strömungswiderstand zu der Feststellung, daß sich keine eindeutigen Aussagen über den instationären Widerstandsbeiwert machen lassen. Nach ihrer Meinung scheint der instationäre Strömungswiderstand eine Funktion der die Strömung beschreibenden Reynoldszahl und einer Beschleunigungszahl Ac zu sein. Die Beschleunigungszahl kennzeichnet das Verhältnis von konvektiver zu lokaler Beschleunigung eines Flüssigkeitselementes.

$$Ac = \left| \frac{u_{rel}^2}{\alpha \cdot \frac{du}{dt}} \right| \quad (2.13)$$

-Einige Autoren benutzen den Kehrwert von Ac . - Ferner weisen Torobin und Gauvin aber auch auf experimentelle Untersuchungen hin, deren Ergebnisse sich nicht mit den beiden Kennzahlen Ac und Re deuten lassen.

Die experimentellen Arbeiten über den Strömungswiderstand lassen sich nach der Einwirkung der Beschleunigung auf den umströmten Körper und nach dem zeitlichen Beschleunigungsablauf klassifi-

zieren. Eine geführte, beschleunigt durch eine ruhende Flüssigkeit gezogene Kugel verhält sich anders hinsichtlich ihres Widerstandes als eine Kugel, die einer beschleunigten Strömung überlassen wird. Die Führung übt einen für die Bewegungsrichtung der Kugel stabilisierenden Einfluß aus. Seitliche Strömungskräfte als Folge von Wirbelablösungen werden von der Führung aufgefangen; Pendelbewegungen der Kugel werden vermieden. - Auf die Bedeutung von Pendelbewegungen für den Strömungswiderstand weist schon Schmidt [69] hin. - Eine Übertragung von Versuchsergebnissen, die an einem geführten Körper gewonnen wurden, auf in einer beschleunigten Strömung frei bewegliche Feststoffteilchen ist im allgemeinen nicht möglich. Eine begründete Aussicht für eine Querverbindung besteht nur dann, wenn die Bewegung des der Strömung frei überlassenen Körpers sich nicht von dem geführten unterscheidet. Für eine Kugel kann eine Ähnlichkeit in den Versuchsergebnissen nur dann erwartet werden, wenn keine Wirbelablösungen an der Kugel stattfinden.

Nach dem zeitlichen Ablauf der Beschleunigung lassen sich die experimentellen Untersuchungen in eine geradlinige, gleichmäßig beschleunigte und in eine oszillierend beschleunigte Umströmung der Kugel einteilen. Ein Arbeitsgebiet der Mechanischen Verfahrenstechnik sind feststoffbeladene Strömungen. Ein Modell für die Umströmung von Feststoffteilchen in der Beschleunigungsstrecke einer pneumatischen oder hydraulischen Förderleitung stellt die erste Gruppe von Zeitgesetzen der Beschleunigung dar, während die zweite Gruppe auf den stationären Betrieb, bei dem die Feststoffteilchen durch die Turbulenz der Strömung in Schwebe gehalten werden, bezogen ist.

Die Ergebnisse verschiedener Autoren über den instationären Widerstandsbeiwert sind widersprüchlich. Schmidt [69] untersuchte den Aufstieg von Ballonen. Seine Geschwindigkeits-Zeit-Kurven weisen periodische Maxima und Minima auf, die Schmidt mit der Wirbelablösung in Verbindung bringt und als Indiz hierfür die Querbewegung des Ballons anführt. Das erste Geschwindigkeitsmaximum stellte er bei einer Geschwindigkeit von etwa 0.86 des stationären Endwertes fest. Generell verzeichnet Schmidt eine Widerstandszunahme für die beschleunigte Bewegung.

Lunnon [47,48,49] unterzog die Beschleunigungsphase seiner Fallversuche einer genauen Untersuchung. Den Koeffizienten der scheinbaren Masse gibt er mit 0.5 bis 2.0 an. In einer Ähnlichkeitsbetrachtung über den beschleunigten Strömungswiderstand führte Lunnon die Beschleunigungszahl Ac ein. Seine umfangreichen Messungen in Luft ließen sich jedoch nicht nach der Beschleunigungszahl Ac , sondern nur nach der absoluten Größe der Beschleunigung einordnen. Die Versuchsergebnisse von Lunnon zeigen eine mit der Beschleunigung monotone Zunahme des Widerstandes an.

Schauki [65] katapultierte Kugeln in Luft. Im Bereich von Reynoldszahlen größer als 1000 verzeichnete er eine bedeutende Erhöhung des instationären Widerstandsbeiwertes gegenüber dem stationären. Im Bereich mäßighoher Reynoldszahlen $Re < 1000$, dem Übergangsbereich, ergaben seine Messungen bei einer Versuchsgenauigkeit von $\pm 20\%$ eine Erhöhung des Widerstandes um 6 %.

Bugliarello [12] untersuchte den Widerstand einer mittels Seiles mit konstanter Beschleunigung durch ruhendes Wasser gezogenen Kugel. Die Beschleunigungszahlen Ac lagen zwischen 25 und 100, die Reynoldszahlen über $2 \cdot 10^4$. Bugliarello kommt zu dem Ergebnis, daß sich das Konzept der scheinbaren Masse als ungeeignet erweist, seine Versuche zu deuten und streicht die Bedeutung der Beschleunigungszahl für den instationären Strömungswiderstand heraus.

Während die meisten Autoren eine Zunahme des instationären Widerstandsbeiwertes gegenüber dem stationären verzeichnen, stellte Ingebo [37] eine Abnahme desselben fest. Ingebo führte in eine Förderleitung Ansammlungen von festen Kugeln und Tropfen ein. Während der Beschleunigungsphase beobachtete er Partikelbeschleunigungen von 1800 g. Seine gesamten Messungen, die sich auf einen Bereich der mit der Partikelabmessung bezogenen Reynoldszahl $Re < 500$ erstreckten, konnten mit

$$c_{w,i} = \frac{27}{Re^{0.84}}$$

korreliert werden.

Moorman [56] stellte in seinen Fallversuchen mit Kugeln in Wasser sorgfältig die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Zeit fest. Brush, Ho und Yen [10] gingen von einer Bewegungsgleichung (2.6) mit einem instationären Widerstandsbeiwert aus, der sich aus dem quasistationären Widerstandsbeiwert für höhere Reynoldszahlen und der scheinbaren Masse sowie dem Basset-Term zusammensetzt. Für Fallversuche mit einer Reynoldszahl zwischen 18 und 540 konnten die experimentellen Geschwindigkeit-Zeit-Kurven von Moorman sehr genau vorausgerechnet werden. Eine Vernachlässigung des Basset-Terms in der Bewegungsgleichung führte zu signifikanten Abweichungen zwischen der Rechnung und den experimentellen Daten. Einschränkung muß hinzugefügt werden, daß nur Versuche, in deren Ablauf keine durch Wirbelablösung verursachte Pendelbewegung der Kugel auftrat, eine ausgezeichnete Übereinstimmung ergaben.

Odar und Hamilton [58] analysierten die Kraft, die auf eine in ruhender Flüssigkeit schwingende Kugel bei Reynoldszahlen kleiner als 62 ausgeübt wird. Ihr Auswertekonzept sah die Einbettung des stationären Widerstandsbeiwertes in den instationären vor. Die Versuchsergebnisse wurden durch variable Koeffizienten der scheinbaren Masse und des Basset-Terms unter Wahrung eines quasistationären Widerstandsbeiwertes angepasst. Odar und Hamilton kommen zu dem Ergebnis, daß

$$c_a = 1.05 - \frac{0.066}{Ac^2 + 0.12} \quad (2,14)$$

$$c_H = 2.88 + \frac{3.12}{(Ac + 1)^3} \quad (2,15)$$

nur Funktionen der Beschleunigungszahl aber nicht der Reynoldszahl sind.

Endoh und Hirano [17] untersuchten den Widerstand auf eine feste Kugel in einer harmonisch oszillierenden Flüssigkeit bei der maximalen Relativgeschwindigkeit. Die Versuchsergebnisse korrelierten sie mit der Stokes-Zahl und der Reynoldszahl und

gewinnen so eine Potenzdarstellung für den Widerstand bei der maximalen Reynoldszahl. Die Einbeziehung von Odar's Meßwerten widerspricht nicht ihrem Ergebnis. Die Unterschiede zwischen den Formeln von Odar e.a. und Endoh e.a. finden ihre Begründung in den verschiedenen Auswerteverfahren.

Wegen der enormen Schwierigkeiten den instationären Widerstandsbeiwert experimentell zu bestimmen, versuchten LeClair und Hamielec [45] durch numerisches Lösen der Navier-Stokes-Gleichungen für die Sedimentation eines kugelförmigen Teilchens im Schwerfeld der Erde wenigstens Hinweise für den Aufbau des Widerstandsbeiwertes zu bekommen. Sie betonen, daß sich der instationäre Widerstandsbeiwert vor allem für geringe Dichteverhältnisse von Kugelmateriale zur Flüssigkeit stark von dem quasistationären unterscheidet, mit zunehmenden Dichteverhältnis aber sich dem quasistationären annähert. Ihre numerischen Ergebnisse stimmen mit den Aussagen von Hughes und Gilliland [36] überein, die die von Basset aufgestellte Bewegungsgleichung hinsichtlich des Lösungstyps einer Analyse unterzogen. Quantitativ verwertbare Aussagen konnten LeClair und Hamielec aufgrund der numerischen Ergebnisse nicht machen,

Die bisher über den instationären Strömungswiderstand vorliegenden Untersuchungen sind unzureichend. In der ingenieurmäßigen Praxis wird wegen Fehlens an spezifischen Informationen daher meist von einem quasistationären Strömungswiderstand ausgegangen, d.h. der Strömungswiderstand wird nach dem empirisch festgestellten Widerstandsbeiwert zu der momentanen Reynoldszahl in Rechnung gesetzt [z.B.57]. In diesem Fall bekommt die Bewegungsgleichung den Charakter eines mathematischen Modells; mit Abweichungen der nach dem Modell berechneten Aussagen von der Wirklichkeit muß gerechnet werden.

Für große Werte der Beschleunigungszahl Ac , Gl. (2.13), wird die Trägheit eines Flüssigkeitselementes im wesentlichen durch die konvektive Beschleunigung erfaßt. Das instationäre Strömungsfeld wird sich von dem quasistationären nur unwesentlich unterscheiden. Ein quasistationärer Strömungswiderstand in der Bewegungsgleichung (2.6) wird hinreichend genaue Resultate erbringen.

Der Schwellenwert der Beschleunigungszahl Ac bis zu dem genügend genau quasistationäres Verhalten vorliegt, kann bei etwa $Ac \sim 100$ vermutet werden. Versuchsergebnisse von Bugliarello [13] zeigen ab $Ac > 25$ stationäres Verhalten an. Eine Grenzschichtrechnung von Schauki [65] für eine beschleunigte Anströmung eines Zylinders, weist den Ablösepunkt bis $Ac > 100$ als unverändert aus. Beide Untersuchungen beziehen sich auf hohe Reynoldszahlen und eine gleichgerichtete Anströmung. Ob ein Schwellenwert für die oszillierende Anströmung der Kugel angegeben werden kann, muß wegen der Beeinflussung der Wirbelablösung durch die Schwingung dahingestellt bleiben.

Im folgenden wird von einem Strömungswiderstand ausgegangen, der sich aus den Termen des quasistationären Widerstandes, der scheinbaren Masse sowie dem Basset-Term zusammensetzt. Die Koeffizienten von scheinbarer Masse sowie des Basset-Terms werden als konstant vorausgesetzt. Aus der Gleichung (2.6) folgt für die Bewegung eines kugelförmigen Feststoffteilchens in einem zeitlich veränderlichen Strömungsfeld

$$c_m(|Re|)|Re|Re + c_a \frac{4}{3} \frac{d^2}{\nu} \frac{dRe}{dt} + c_H \sqrt{2} \sqrt{\frac{d^3}{\nu}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{t^*}^t \frac{\frac{dRe}{dt^*}}{\sqrt{t-t^*}} dt^* + \frac{4}{3} \frac{d^2}{\nu} \frac{\rho_f}{\rho_p} \frac{dRe}{dt} - Ar \left[1 - \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} \right] = 0 \quad (2.16)$$

Die Bewegungsgleichung (2.16) schließt die zähe Umströmung der Kugel mit ein. Dem Koeffizienten der scheinbaren Masse c_a kann für das Bewegungsverhalten der Kugel ohnehin nur geringe Bedeutung zugesprochen werden, so daß der Einfluß der scheinbaren Masse mit dem potentialtheoretischen Wert $c_a = 0.5$ hinreichend berücksichtigt ist. Der Basset-Term wird mit in Rechnung gesetzt, um die Tendenz dieses Terms für die Bewegung eines kugelförmigen Feststoffteilchens abschätzen zu können.

Die sich für die zähe Umströmung eines Feststoffteilchens in einem veränderlichen Strömungsfeld ergebende Bewegungsgleichung findet sich zum erstenmal bei Tchen [77], der die Bewegungsgleichung als stochastische Gleichung benutzte, um die

Vermischung des Feststoffes in einem homogenen, isotropen Turbulenzfeld zu berechnen. Von Sanden [84] versuchte durch eine graphische Lösung der um den Basset-Term verkürzten Bewegungsgleichung Rückschlüsse für die Einstellung von Setzmaschinen zu ziehen. Seine Ergebnisse sind jedoch nur für die gleichgerichtete Anströmung richtig, da die Widerstandskraft als stets in die gleiche Richtung wirkend in Rechnung gesetzt wird. Einen ähnlichen Fehlschluß, auf den Molerus [53] hinweist, unterlag Houghton [31] in seiner Arbeit über das Verhalten von Partikeln in einem sinusförmigen Geschwindigkeitsfeld, so daß sämtliche Schlußfolgerungen Houghtons anzuzweifeln sind.

In einem periodisch veränderlichen Strömungsfeld mit der Schwingungsdauer T bietet sich zum Beschreiben der momentanen Geschwindigkeit bzw. Reynoldszahl eines kugelförmigen Teilchens die auf die Schwingungsdauer T des Strömungsfeldes bezogene dimensionslose Zeit an. Äquivalent hierzu ist die mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

dimensionsfrei dargestellte Zeit

$$\tau = \omega t \quad (2.17)$$

deren Einführung für die im anschließenden Kapitel durchgeführte Näherungsrechnung Vorteile mit sich bringt.

Mit der dimensionslosen Zeit τ und der Stokes-Zahl, Gl. (2.11), kann die Gleichung (2.16) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dRe}{d\tau} + c_n (|Re|) |Re| Re + c_n \frac{\sqrt{2}}{Sc} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\frac{dRe}{d\tau}}{\sqrt{\tau - \tau_0}} d\tau \\ - Ar \left[1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{d\tau} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die dimensionslose Gruppe ξ bedeutet

$$\xi = \frac{3 St^2}{4 \left(\frac{R}{R_0} + c_a \right)} \quad (2.19)$$

Die Bewegungsgleichung (2.18) gibt die stationäre wie die instationäre, zähe Umströmung eines kugelförmigen Teilchens richtig wieder. Für die zeitlich veränderliche Anströmung bei höheren Reynoldszahlen stellt diese Gleichung ein mathematisches Modell dar. Wird c_H gleich Null gesetzt, so beschreibt die Gleichung (2.18) das quasistationäre Bewegungsverhalten einer Kugel. Die nach diesem Modell zu erwartenden Effekte für die Sinkgeschwindigkeit einer kugelförmigen Partikel werden im folgenden eingehend untersucht.

3. Näherungslösung

Um die Effekte einer instationären Anströmung der Kugel im harmonisch pulsierenden Strömungsfeld vorausberechnen zu können, wird im folgenden von einem mathematischen Modell ausgegangen, bei dem der Koeffizient der scheinbaren Masse c_a sowie der Koeffizient des Basset-Terms c_H als konstant und der Widerstandsbeiwert c_w als quasistationär angenommen werden. Der Basset-Term wird trotz seiner Umstrittenheit für höhere Reynoldszahlen insofern mitberücksichtigt, um die Tendenz dieses Terms für die nach der nichtlinearen Bewegungsgleichung (2.18) zu erwartende Beeinflussung der Sinkgeschwindigkeit und der Amplitude der Kugelbewegung abschätzen zu können. Die getroffenen Annahmen sind problematisch, andererseits sind sie wegen Fehlens an spezifischen Informationen über diese Größen notwendig, um zu einer auswertbaren Bewegungsgleichung zu gelangen.

Die Bewegungsgleichung (2.18) enthält den Widerstandsbeiwert, der für stationäre Strömungsverhältnisse nur eine Funktion der Reynoldszahl ist. Um geschlossene Formeln zu erhalten, die das Bewegungsverhalten einer im pulsierenden Strömungsfeld sedimentierenden Kugel beschreiben, muß man den Widerstandsbeiwert durch einen analytischen Ausdruck approximieren. Kürten, Raasch, Rumpf [42] und Boothroyd [8] geben verschiedene Widerstandsbeiwert-Approximationen mit ihren Gültigkeitsbereichen und maximalen relativen Fehlern an. Wie Molerus [53] gezeigt hat, ist die Verringerung der mittleren Fallgeschwindigkeit einer Kugel im pulsierenden Strömungsfeld auf ein nichtlineares Widerstandsgesetz zurückzuführen. Daher ist eine Widerstandsbeiwert-Approximation, die den nichtlinearen Bereich gut wiedergibt, zum Beschreiben der Sinkgeschwindigkeitsverringerung besonders geeignet.

Für die folgende Rechnung wird ein Widerstandsbeiwert

$$c_w = \frac{c_1}{|\text{Re}|} + c_2 \quad (3.1)$$

zugrundegelegt, wobei $c_1 = 24$ und $c_2 = 0.5$ für die Kugel zu

setzen ist.

Für ein periodisches Zeitgesetz des Strömungsfeldes kann eine nach einer gewissen Zeit mit der gleichen Periode wiederkehrende Kugelgeschwindigkeit erwartet werden. Von Molerus und Werther [54] durchgeführte numerische Berechnungen der Bewegungsgleichung für ein sinusförmiges Zeitgesetz haben ergeben, daß nach zwei bis drei Zyklen des Strömungsfeldes der Einschwingvorgang abgeklungen ist. Für den eingeschwungenen Zustand, in dem die Kugelgeschwindigkeit mit der Periode des Strömungsfeldes wiederkehrt, ist demnach ein Fourierreihenansatz für die Kugelgeschwindigkeit bzw. für die Reynoldszahl Re sinnvoll:

$$Re(\tau) = Re(\tau + 2\pi) = Re_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Re_{1,j} \cdot \sin(j\tau) + Re_{2,j} \cdot \cos(j\tau) \quad (3.2)$$

Durch eine für die Rechnung zweckmäßige Festlegung der Zeitzählung

$$Re(\pi) = Re(-\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re(\tau) \cdot d\tau \quad (3.3)$$

wird eine Phase ϵ zwischen der Kugelgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Strömungsfeldes eingeführt, derart, daß das Zeitgesetz des Strömungsfeldes

$$v(\tau) = A\omega \cdot \sin(\tau + \epsilon) \quad (3.4)$$

lautet, während für die momentane Reynoldszahl die Bedingung (3.3) gilt.

Die Bewegungsgleichung (2.18) lautet nun mit dem Zeitgesetz des Strömungsfeldes (3.4) und der Widerstandsbeiwert-Approximation (3.1)

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dRe}{d\tau} + c_1 \cdot Re + c_2 \cdot |Re| \cdot Re + c_H \cdot \frac{\sqrt{2}}{St} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\frac{dRe(\tau')}{d\tau'}}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' - Ar \left[1 - \frac{A\omega^2}{g} \cos(\tau + \epsilon) \right] = 0$$

(3.5)

In der Gleichung (3.5) tritt als das Verhältnis von maximaler Beschleunigung des Strömungsfeldes zu der Erdbeschleunigung eine weitere dimensionsfreie Kennzahl auf:

$$\eta^2 \equiv \frac{A\omega^2}{g} \quad (3.6)$$

Die stationäre Sinkbewegung einer Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit ist als Sonderfall in der Bewegungsgleichung (3.5) enthalten. Für $\eta^2 = 0$ weist die Relativgeschwindigkeit nach einer Anpassungsphase an die stationäre Bewegung keine Änderung mit der Zeit auf; die Reynoldszahl Re für die stationäre Sinkbewegung sei Re_{ruh} . Aus Gl. (3.5) folgt

$$c_1 \cdot Re_{\text{ruh}} + c_2 \cdot Re_{\text{ruh}}^2 = Ar \quad (3.7)$$

Da die umgebende Flüssigkeit keine Geschwindigkeit aufweist ($v = 0$), kann aus dieser Gleichung die Sinkgeschwindigkeit w_f der Kugel berechnet werden

$$Re_{\text{ruh}} \equiv \frac{w_f d}{\nu} \quad (3.8)$$

Die Archimedes-Zahl Ar und die mit der Sinkgeschwindigkeit w_f gebildete Reynoldszahl sind nach Aussage der Gleichung (3.8) zwei äquivalente Kennzahlen für das Problem eines in einer zeitlich veränderlichen Trägerströmung befindlichen Teilchens.

Die Bewegungsgleichung (3.5) ist nichtlinear. Während sich lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dadurch auszeichnen, daß die partikuläre Lösung - diese beschreibt den eingeschwungenen Zustand - der Differentialgleichung für eine aus sinusförmigen Termen aufgebaute Störfunktion sich ebenfalls aus Sinus- und Cosinus-Funktionen der gleichen Frequenz zusammensetzt, gilt dies nicht mehr für die Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung. Ein termbegrenzter Ansatz (3.2) wird die Bewegungsgleichung nicht identisch erfüllen; es entsteht ein Fehler. Ein Ansatz, der sich für die Lösung der linearen Restgleichung - Gleichung (3.5) verkürzt um die Nichtlinearität - noch als ausreichend

erweist

$$Re = Re_0 + Re_1 \cdot \sin \tau + Re_2 \cdot \cos \tau \quad (3.9)$$

wird auch der nichtlinearen Differentialgleichung im wesentlichen genügen, da die Grundschiwingung der Kugelbewegung im Bewegungsverhalten der Kugel dominierend ist. Wie eine Fourier-Analyse numerischer Lösungen der Differentialgleichung zeigt, entfallen auf die höheren Harmonischen des Bewegungsvorganges etwa 3 % der Grundschiwingungsamplitude. Die quasilineare Beschreibung der Bewegungsgleichung geht nun von dem Ansatz (3.9) aus. Nach der Forderung (3.3)

$$Re(\pi) = Re(-\pi) = Re_0 + Re_2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re(\tau) \cdot d\tau$$

vereinfacht sich der Ansatz zu

$$Re = Re_0 + Re_1 \cdot \sin \tau \quad (3.10)$$

Dieser Ansatz wird in die Bewegungsgleichung (3.5) eingesetzt, die infolgedessen einen Fehler $d(\tau)$ aufweist. Da dieser Ansatz nur nach Abklingen des Einschwingvorganges gilt, muß die untere Grenze des Basset-Integrals $\tau_0 \rightarrow \infty$ gesetzt werden. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\cos \tau^*}{\sqrt{\tau - \tau^*}} d\tau^*$$

läßt sich umformen [53,77] durch die Substitution $x = \tau - \tau^*$

$$\cos \tau^* = \cos x \cdot \cos \tau + \sin x \cdot \sin \tau$$

$$\int_{-\infty}^{\tau} \frac{\cos \tau^*}{\sqrt{\tau - \tau^*}} d\tau^* = \cos \tau \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx + \sin \tau \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Mit den Fresnel-Integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

erhält man für den Fehler $d(\tau)$

$$d(\tau) = \frac{1}{g} \cdot Re_1 \cdot \cos \tau + c_1 (Re_0 + Re_1 \sin \tau) + c_2 |Re_0 + Re_1 \sin \tau| (Re_0 + Re_1 \sin \tau) + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} \cdot Re_1 \cdot (\cos \tau + \sin \tau) - Ar \left[1 - \frac{Aw^2}{g} \cos(\tau + \epsilon) \right] = 0 \quad (3.11)$$

Wegen der Periodizität von $Re(\tau)$ ist die Fehlerfunktion $d(\tau)$ auch eine periodische Funktion der dimensionslosen Zeit τ . Sinnvollerweise wird man fordern, daß der Fehler $d(\tau)$ keinen zeitlich mittleren Wert aufweist und frei von einem Grundschwingungsanteil ist [38,68], da die Grundschwingung den Bewegungsablauf dominierend bestimmt. Die Methode der Harmonischen Balance [7] führt also zur Orthogonalität von der Fehlerfunktion $d(\tau)$ und den Ansatzfunktionen, aus der sich die Bestimmungsgleichungen für die Freiwerte des Ansatzes Re_0 , Re_1 und ϵ herleiten

$$\int_{-\pi}^{\pi} d(\tau) \cdot d\tau = 0 \quad (3.12)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d(\tau) \cdot \sin \tau \cdot d\tau = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d(\tau) \cdot \cos \tau \cdot d\tau = 0 \quad (3.14)$$

Werden die aus den linearen Termen der Differentialgleichung resultierenden Beiträge zur Funktion

$$f(\tau) = \frac{1}{g} \cdot Re_1 \cdot \cos \tau + c_1 (Re_0 + Re_1 \sin \tau) + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} Re_1 (\sin \tau + \cos \tau) - Ar \cdot \left[1 - \frac{Aw^2}{g} \cos(\tau + \epsilon) \right]$$

zusammengefaßt, so läßt sich die Fehlerfunktion $d(\tau)$ durch

$$d(\tau) = f(\tau) + c_2 |Re_0 + Re_1 \sin \tau| \cdot (Re_0 + Re_1 \sin \tau) \quad (3.15)$$

darstellen.

Die Berechnung der Defektorthogonalität führt auf die Teilintegrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot d\tau = (c_1 \cdot Re_0 - Ar) \cdot 2\pi \quad (3.16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \sin \tau \cdot d\tau = (c_1 + c_H \frac{\sqrt{2}}{St}) Re_1 \cdot \pi - Ar \cdot \eta^2 \cdot \sin \epsilon \cdot \pi \quad (3.17)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cdot \cos \tau \cdot d\tau = (\frac{1}{\xi} + c_H \frac{\sqrt{2}}{St}) Re_1 \cdot \pi + Ar \cdot \eta^2 \cdot \cos \epsilon \cdot \pi \quad (3.18)$$

3.1 Schleichende Strömung

Der Sonderfall der schleichenden Strömung läßt sich leicht abhandeln. Für sehr kleine Reynoldszahlen kann die Nichtlinearität des Widerstandsgesetzes vernachlässigt werden; die Funktion $f(\tau)$ geht dann in die Fehlerfunktion $d(\tau)$ über und die Orthogonalitätsbedingungen (3.12) bis (3.14) führen auf das lineare Gleichungssystem

$$c_1 \cdot Re_0 = Ar \quad (3.19)$$

$$(c_1 + \frac{\sqrt{2}}{St} c_H) \cdot Re_1 = Ar \cdot \eta^2 \cdot \sin \epsilon \quad (3.20)$$

$$(\frac{1}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{St} c_H) \cdot Re_1 = -Ar \cdot \eta^2 \cdot \cos \epsilon \quad (3.21)$$

Die erste Gleichung des Systems sagt in Verbindung mit der Gleichung (3.7) aus, daß ein zeitlich veränderliches Strömungsfeld die Sinkgeschwindigkeit der Kugel nicht beeinflußt [53]. Aus der zweiten und dritten Gleichung des Systems wird durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen die Phase ϵ eliminiert.

$$Re_1^2 \left[(c_1 + \frac{\sqrt{2}}{St} c_H)^2 + (\frac{1}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{St} c_H)^2 \right] = Ar^2 \cdot \eta^4 \quad (3.22)$$

Das Amplitudenverhältnis der Partikelschwingung zur Flüssigkeitsschwingung wird aus der Definition (2.5) und dem Ansatz für die Reynoldszahl (3.10) sowie der Zeitfunktion des Strömungsfeldes (3.4) hergeleitet:

$$Re_1 \cdot \sin \tau = \frac{d}{\nu} \cdot \left[(u_{11} - A\omega \cos \epsilon) \sin \tau + (u_{12} - A\omega \sin \epsilon) \cos \tau \right]$$

Nach einem Koeffizientenvergleich weist diese Gleichung das Amplitudenverhältnis zu

$$\frac{w_1^2}{(A\omega)^2} = \frac{w_{y1}^2 + w_{y2}^2}{(A\omega)^2} = 1 + 2 \frac{Re_1 \cdot \nu}{A\omega d} \cdot \cos \varepsilon + \left(\frac{Re_1 \cdot \nu}{A\omega d} \right)^2 \quad (3.23)$$

aus. Nach Einsetzen der für die zähe Umströmung geltenden Ergebnisse (3.21) und (3.22) erhält man für das Amplitudenverhältnis

$$\left(\frac{w_1}{A\omega} \right)^2 = \frac{\left(c_1 + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} - \frac{\nu\omega}{g d} Ar + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} \right)^2}{\left(c_1 + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{St} c_H \right)^2} \quad (3.24)$$

Dieses Ergebnis wurde von König [39] angegeben, der als Ausgang seiner Rechnung den von Stokes berechneten Widerstand einer harmonisch schwingenden Kugel in einer zähen Flüssigkeit wählte.

3.2 Umströmung bei höheren Reynoldszahlen

Treten bei der Umströmung der Kugel Reynoldszahlen $Re > 1$ auf, muß der nichtlineare Term in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden. Die Art der Nichtlinearität und des Bewegungsansatzes erzwingt die Unterscheidung zweier Fälle, die getrennt abgehandelt werden.

3.21 Wechselnde Anströmung

Größere Schwingungsintensitäten η^2 des Strömungsfeldes verursachen einen Anströmwechsel an der Kugel. Für den Ansatz (3.10) bedeutet dies $Re_1 > Re_0$. Wie der Abbildung 3.1 zu entnehmen ist, tritt der Anströmwechsel nach der Zeit τ_1 und τ_2 auf. In dem Zeitintervall $\tau_2 < \tau < \tau_1$ ist die momentane Reynoldszahl kleiner als Null, so daß in diesem Zeitabschnitt $|Re| = -Re$

gilt. Zu anderen Zeitpunkten ist die momentane Reynoldszahl stets größer als Null, d.h. $|Re| = Re$. Die Fehlerfunktion $d(\tau)$

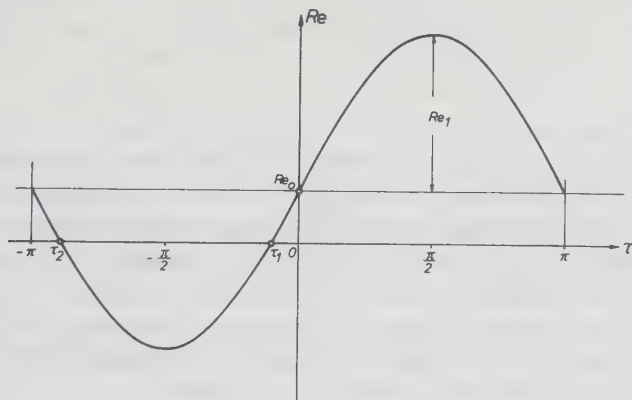


Abb. 3.1 Momentane Reynoldszahl

ist wegen des Betragszeichens im nichtlinearen Term nur abschnittsweise analytisch. Im Anhang A sind die zur quasi-linearen Beschreibung der Nichtlinearität benötigten Integrale ausgewertet, Gl. (A.3). Die Orthogonalitätsforderungen (3.12) bis (3.14) führen mit den Gleichungen (A.3) auf das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 2\pi c_1 Re_0 + c_2 \cdot 2 \cdot Re_1^2 \left[(2z^2 + 1) \arcsin(z) + 3z \sqrt{1-z^2} \right] &= 2\pi \cdot Ar \\
 \pi \left(c_1 + c_2 \frac{\sqrt{2}}{St} \right) Re_1 + c_2 \cdot 4 Re_1^2 \left[z \cdot \arcsin(z) + \frac{1}{3} \sqrt{1-z^2} (z^2 + 2) \right] &= \pi \cdot Ar \cdot \eta^2 \cdot \sin \varepsilon \\
 \pi \left(\frac{1}{5} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{St} \right) Re_1 &= -\pi \cdot Ar \cdot \eta^2 \cdot \cos \varepsilon
 \end{aligned}$$

(3.25)

In diesen Gleichungen bedeutet z der Quotient aus den Reynoldszahlen für den zeitlich mittleren und den oszillierenden Bewegungsanteil

$$z = \frac{Re_0}{Re_1} \quad (3.26)$$

der die Zeit des an der Kugel auftretenden Anströmwechsels festlegt.

$$\tau_1 = - \arcsin(z) \quad (3.27)$$

$$\tau_2 = - \pi - \tau_1 \quad (3.28)$$

Die Gleichungen des Systems (3.25) sind nichtlinear und gekoppelt. Eine Auflösung nach den Freiwerten Re_0 , Re_1 und ϵ ist allgemein nicht möglich. Unter der Voraussetzung hoher Schwingungsintensitäten η^2 kann erwartet werden, daß der Anströmwechsel kurz nach der Umkehr der Bewegungsrichtung der Flüssigkeit auftritt. In diesem Fall dürfen die Defektorthogonalitätsbeziehungen für kleine Werte von $z = -\sin\tau_1$ linearisiert werden. Die Linearisierung ist im Anhang B durchgeführt. Das hinsichtlich z linearisierte Gleichungssystem (3.25) lautet

$$\begin{aligned} c_1 \cdot Re_0 + \frac{4}{\pi} c_2 \cdot Re_0 \cdot Re_1 &= Ar \\ (c_1 + c_H \frac{\sqrt{2}}{St}) Re_1 + \frac{8}{3\pi} c_2 \cdot Re_1^2 &= Ar \cdot \eta^2 \cdot \sin \epsilon \\ (\frac{1}{St} + c_H \frac{\sqrt{2}}{St}) Re_1 &= - Ar \cdot \eta^2 \cdot \cos \epsilon \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nach Elimination der Phase ϵ aus der zweiten und dritten Gleichung des Systems erhält man für die Amplitude der Reynoldszahl Re

$$Re_1^2 \left[\left(\frac{1}{St} + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} \right)^2 + \left(c_1 + c_H \frac{\sqrt{2}}{St} + \frac{8}{3\pi} c_2 \cdot Re_1 \right)^2 \right] = Ar^2 \cdot \eta^4 \quad (3.30)$$

Die Gleichung 4. Grades für die gesuchte Reynoldszahl Re_1 ist zwar analytisch geschlossen auflösbar, aber man wird für eine Beschreibung der nichtlinearen Effekte des Kugelverhaltens für $Re > 1$ eine weitgehende Vereinfachung vornehmen. Aus der ersten Gleichung des Systems (3.29) folgt, daß durch den nichtlinearen Strömungswiderstand die mittlere Sinkgeschwindigkeit beeinflusst wird. Für mäßig hohe Reynoldszahlen überwiegt in der Gleichung (3.30) der auf die Nichtlinearität des quasistationären

Strömungswiderstandes zurückgehende Term. Für eine Approximation $c_w = c_2$ und Unterdrücken des Basset-Terms läßt sich die Gleichung (3.30) auflösen. Der Stokes-Anteil des Widerstandsbeiwertes kann für mäßig hohe Reynoldszahlen durch einen Taylor-Ansatz berücksichtigt werden. Als maßgebliche Größe erweist sich

$$M = \frac{c_1}{c_2 \operatorname{Re}_{\text{ruh}}} \quad (3.31)$$

die den Stokes-Anteil des Strömungswiderstandes für die stationäre Sinkbewegung wiedergibt. Näherungsweise kann für das Verhältnis von zeitlich mittlerer Fallgeschwindigkeit der Kugel im harmonisch pulsierenden Strömungsfeld zur stationären Sinkgeschwindigkeit - im folgenden Abbremsseffekt genannt -

$$e = \frac{\operatorname{Re}_0}{\operatorname{Re}_{\text{ruh}}} = \frac{u_0}{u_f} = \frac{\operatorname{Re}_0}{\operatorname{Re}_{\text{ruh}}} \bigg|_{M=0} + \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\operatorname{Re}_0}{\operatorname{Re}_{\text{ruh}}} \right) \bigg|_{M=0} \cdot M \quad (3.32)$$

gesetzt werden. Einsetzen des Ansatzes (3.32) in das Gleichungssystem (3.29) und Koeffizientenvergleich für die Terme M^0 und M^1 führt auf

$$e_0 = \frac{\operatorname{Re}_0}{\operatorname{Re}_{\text{ruh}}} = \frac{\pi \cdot n_f \cdot (s_p + c_a \cdot s_f)}{4 \sqrt{2} \cdot A \cdot \omega \cdot (s_p - s_f)} \sqrt{1 + \left(\frac{16 A g [s_p - s_f]^2}{3 \pi \cdot n_f^2 \cdot [s_p + c_a \cdot s_f]^2} \right)^2} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{\operatorname{Re}_0}{\operatorname{Re}_{\text{ruh}}} \right) \bigg|_{M=0} = \frac{2 \zeta^2 (1 - e_0) e_0 + \frac{1}{9} \cdot \frac{2 - e_0}{e_0}}{2 \zeta^2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1 - e_0}{e_0}} \quad (3.34)$$

In der Gleichung (3.34) ist e_0 nach Gleichung (3.33) einzusetzen. Die zur Abkürzung eingeführte dimensions freie Größe ζ bedeutet

$$\zeta = \frac{n_f \cdot \omega}{2 g} \cdot \frac{s_p + c_a \cdot s_f}{s_p - s_f} \quad (3.35)$$

Für hohe Schwingungsintensitäten, insbesondere für hohe Frequenzen, fällt die Korrektur nach Gleichung (3.34) sehr klein aus, so daß zur Beschreibung der zeitlich mittleren Fallgeschwindigkeit eine Widerstandsbeiwert-Approximation $c_w = c_2$ hinreichend genau ist. Jedoch ist festzuhalten, daß aufgrund des Stokes-Anteil des quasistationären Widerstandsbeiwertes und , sofern existent, des Bassetterms der mit einer Approximation $c_w = c_2$ berechnete Abbremsseffekt etwas zu hoch ausfällt.

Bevor die gewonnenen Ergebnisse diskutiert werden, sei der Fall einer unveränderten Anströmungsrichtung der Kugel betrachtet.

3.22 Gleichgerichtete Anströmung der Kugel

Wenn kein Anströmwechsel an der Kugel auftritt, so ist die zeitlich mittlere Fallgeschwindigkeit der Kugel stets größer als der oszillierende Anteil der Geschwindigkeit, d.h. für den Ansatz (3.10) gilt $Re_0 > Re_1$. Die Bewegungsgleichung (3.5) bzw. der Fehler $d(\tau)$ ist dann im gesamten Zeitintervall $-\pi < \tau < \pi$ analytisch, da $|Re| = Re$ gilt.

Auch für diesen für die Rechnung einfacheren Fall werden die Freiwerte Re_0 , Re_1 und ϵ nach der gleichen Vorschrift - Gleichungen (3.12) bis (3.14) - berechnet. Die auf die Nichtlinearität zurückgehenden Teilintegrale finden sich im Anhang (A.2); die Beiträge der linearen Restgleichung zu den Defekt - orthogonalitätsbeziehungen geben die Gleichungen (3.16) bis (3.18) an. Das resultierende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}
 c_1 Re_0 + c_2 \left(Re_0^2 + \frac{1}{2} Re_1^2 \right) &= Ar \\
 \left(c_1 + c_2 \frac{\sqrt{2}}{3\epsilon} \right) Re_1 + 2 c_2 Re_0 Re_1 &= Ar \cdot \eta^2 \sin \epsilon \\
 \left(\frac{1}{5} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{3\epsilon} \right) Re_1 &= -Ar \cdot \eta^2 \cos \epsilon
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Elimination der Phase ϵ aus der zweiten und dritten Gleichung führt auf

$$Re_1^2 \left[\left(c_1 + c_n \frac{\sqrt{2}}{St} + 2c_2 \cdot Re_0 \right)^2 + \left(\frac{1}{St} + c_n \frac{\sqrt{2}}{St} \right)^2 \right] = Ar \cdot \eta^4 \quad (3.37)$$

Mit diesem Zwischenergebnis kann die erste Gleichung des Systems (3.36) entkoppelt werden. Nach Vernachlässigung des Bassetterms, Einführen der durch die Gleichungen (3.31), (3.32) und (3.35) definierten Größen M , e , ζ wird man auf eine biquadratische Gleichung für den Abbremsseffekt e geführt.

$$\left[\left(\frac{M+2e}{1+M} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{1+M} \right)^2 \right] \left[\left(1 + \frac{M}{2} \right)^2 - \left(e + \frac{M}{2} \right)^2 \right] = \frac{\eta^4}{2}$$

Für den Abbremsseffekt erhält man

$$e = \frac{u_0}{u_f} = -\frac{M}{2} + \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{M}{2}\right)^2 - (1+M)^2 \zeta^2}{2} + \sqrt{\frac{\left[\left(1 + \frac{M}{2}\right)^2 + (1+M)^2 \zeta^2\right]^2}{4} - \frac{(1+M)^2 \eta^4}{8}}} \quad (3.38)$$

Eine gleichgerichtete Anströmung der Kugel kann nur für geringe Schwingungsintensitäten erwartet werden. Für kleine Werte von η^2 folgt aus der Gleichung (3.38) als gute Näherung

$$e \approx 1 - \frac{\eta^4}{16} \cdot \frac{(1+M)^2}{\left(1 + \frac{M}{2}\right) \left[(1+M)^2 \zeta^2 + \left(1 + \frac{M}{2}\right)^2 \right]^2} \quad (3.39)$$

Insbesondere für niedere Frequenzen nimmt ζ gegenüber eins sehr kleine Werte an, so daß näherungsweise gilt:

$$e \approx 1 - \frac{\eta^4}{16} \cdot \frac{(1+M)^2}{\left(1 + \frac{M}{2}\right)^3} = 1 - \frac{Ar^2 \omega^4}{16 g^2} \cdot \frac{(1+M)^2}{\left(1 + \frac{M}{2}\right)^3} \quad (3.40)$$

3.23 Gültigkeitsbereich der Lösungen der Näherungsrechnung

Für die gleichgerichtete wie für die wechselnde Anströmung der Kugel werden in der vorliegenden Arbeit Formeln angegeben, die den Abbremsseffekt einer Kugel im pulsierenden Strömungsfeld beschreiben. Die Frage, wann auf die eine oder die andere

Lösung zurückgegriffen werden muß, läßt sich aus dem Gleichungssystem (3.25) oder (3.36) in gleicher Weise beantworten; für den Grenzfall $Re_{o,gr} = Re_{1,gr}$ bzw. $z = 1$ folgt aus den jeweils ersten Gleichungen der genannten Gleichungssysteme

$$c_1 \cdot Re_{o,gr} + \frac{3}{2} c_2 \cdot Re_{o,gr}^2 = Ar = c_1 \cdot Re_{ruh} + c_2 \cdot Re_{ruh}^2 \quad (3.41)$$

Eine äquivalente Gleichung hierzu ist

$$M \cdot e_{gr} + \frac{3}{2} \cdot e_{gr}^2 = 1 + M$$

mit der Lösung

$$e_{gr} = \sqrt{\frac{(M-3)^2}{9} - \frac{1}{3}} - \frac{M}{3} > \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (3.42)$$

Für $e_{gr} < e < 1$ gilt die Lösung für die gleichgerichtete Anströmung der Kugel, im anderen Fall die Lösung für die wechselnde Anströmung.

3.3 Andere Näherungslösungen

In der Literatur werden einige Näherungslösungen der Bewegungsgleichung (3.5) genannt. Für die wechselnde Anströmung kommt Molerus [53] nach einer Linearisierung der Bewegungsgleichung zu dem Ergebnis, daß sich der Abbremsseffekt

$$e \approx \frac{w_f}{Aw}$$

umgekehrt proportional zur Geschwindigkeitsamplitude des Strömungsfeldes verhält. Die Bedeutung der Näherungslösung besteht darin, daß nach der Bewegungsgleichung (3.5) - im Gegensatz zu der von Houghton [31] vertretenden Ansicht - ein Aufsteigen von Feststoffteilchen im sinusförmig pulsierenden Strömungsfeld nicht zu erwarten ist.

Für eine gleichgerichtete Relativgeschwindigkeit $Re > 0$ kam Houghton [34] zu ähnlichen Resultaten wie sie hier abgeleitet werden. Houghton ging von der Bewegungsgleichung (3.5) mit einer Widerstandsbeiwert-Approximation $c_w = c_2$ und $c_H = 0$ aus und löste diese Gleichung näherungsweise nach der Rayleigh-Ritz-Methode. Seine Lösung ist als Sonderfall für $M = 0$ in der Gleichung (3.38) enthalten. In einer späteren Veröffentlichung [33] verglich Houghton seine Näherungslösung mit der Lösung der auf eine Mathieu-Differentialgleichung transformierten Bewegungsgleichung vom Riccati-Typ. Innerhalb des Gültigkeitsbereiches weist die Näherungslösung nur einen sehr geringen Fehler auf.

Baird, Senior und Thompson [3] setzten, um eine Näherungslösung für die mittlere Fallgeschwindigkeit aus der Bewegungsgleichung für niederfrequente Schwingungen zu erhalten, für die Schwankungsgeschwindigkeit der Kugel eine für nichtaufsteigende Blasen in einer schwingenden, zähen Flüssigkeit geltende Beziehung ein und bestimmten aus der Bewegungsgleichung die zeitlich mittlere Fallgeschwindigkeit. Für den Ansatz (3.10) bedeutet dies eine Vorgabe sowohl von Re_1 als auch der Phase ϵ . Die Näherung von Baird u.a. führt als Folge dieser Annahme auf einen zu starken Abbremsseffekt gegenüber numerischen Lösungen der Bewegungsgleichung.

3.4 Diskussion

Die dem mathematischen Problem zugrundeliegende Bewegungsgleichung ist zwar numerisch beliebig genau lösbar, die Darstellung numerischer Ergebnisse ist aber an Diagramme gebunden. Zudem wird eine derartige Wiedergabe für mehr als drei Einflußgrößen, wie sie bei diesem Problem vorliegen, unübersichtlich. Der Vorteil der Näherungsrechnung, auf analytische Formeln zu führen, wird durch zusätzliche, das mathematische Problem vereinfachende Annahmen erkauft. So stützt sich die durchgeführte Rechnung auf eine Widerstandsbeiwert-Approximation, die zwar den wesentlichen Verlauf des Wider-

standsbeiwertes als Funktion der Reynoldszahl wiedergibt, aber im Übergangsbereich einen beträchtlichen relativen Fehler gegenüber den tatsächlichen Werten aufweist. Eine genauere Approximation

$$c_w = \frac{21}{\sqrt{Re}} + \frac{6}{\sqrt{Re}} + 0.28 \quad (3.43)$$

ist für die numerische Auswertung der Bewegungsgleichung (3.5) verwendet worden. - Für eine Näherungsrechnung, mit dem Ziel eine analytische Formel für den Abbremsseffekt aufzustellen, ist eine derartige Approximation nicht geeignet, da die Rechnung auf elliptische Integrale führt.

Um die Güte der Näherungsrechnung zu veranschaulichen, sind in den Abbildungen 3.2 bis 3.4 für spezielle Zahlenwerte die Ergebnisse der Näherungsrechnung den numerischen Lösungen gegenübergestellt.

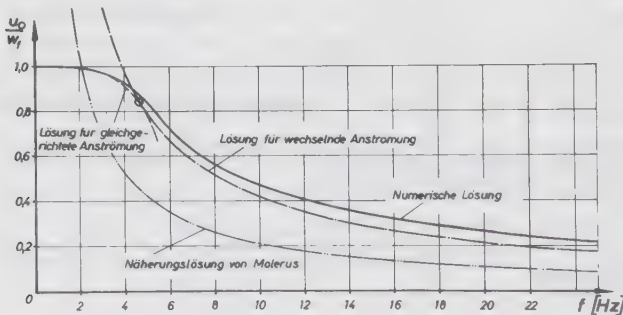


Abb. 3.2: Abbremsseffekt als Funktion der Frequenz, $d = 2 \text{ mm}$; $A = 20 \text{ mm}$;
 $\rho_p / \rho_f = 2.5$; $c_a = 0.5$; $c_H = 0$

In der Abbildung 3.2 ist die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit als Funktion der Frequenz dargestellt. Die Lösung für eine

unveränderte Anströmung (3.38) weicht nur wenig von der numerischen Lösung innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches ab und zwar trotz verschiedener c_w - Approximationen für beide Kurven. Bei niederen Schwingungsintensitäten schwankt die momentane Reynoldszahl nur innerhalb eines engen Bereiches um die Reynoldszahl der Sinkbewegung in einer ruhenden Flüssigkeit, so daß sich Unterschiede in den Approximationen kaum auswirken können. Im Gegensatz dazu ist der Unterschied zwischen der Lösung für eine wechselnde Anströmungsrichtung an der Kugel und der numerischen Lösung in erster Linie auf die unterschiedlichen c_w - Approximationen zurückzuführen. Diese Lösung ist für sehr hohe Schwingungsintensitäten, die wiederum einen starken Abbremsseffekt verursachen, abgeleitet worden; die Näherungslösung gibt aber auch für geringere Schwingungsintensitäten die numerische Lösung gut wieder. Greift man auf die Formeln (3.33) und (3.34) zurück, so kann leicht festgestellt werden, daß die Sinkgeschwindigkeit mit wachsender Frequenz bzw. Amplitude monoton abnimmt. Molerus [53] kommt zu dem gleichen Ergebnis. Die Näherungslösung von Molerus ist ebenfalls in das Diagramm (Abb. 3.2) eingezeichnet worden; sie gibt die Tendenz des Abbremsseffektes richtig wieder, schreibt aber der Amplitude die gleiche Wirkung wie der Frequenz zu und liefert eine zu hohe Abbremswirkung. Nach der hier durchgeführten Näherungsrechnung besitzt die Frequenz sowohl für die gleichgerichtete als auch für die wechselnde Anströmung der Kugel einen stärkeren Einfluß auf den Abbremsseffekt, was in Übereinstimmung zu numerischen Lösungen der Bewegungsgleichung steht.

Die Abbildung 3.3 gibt den Einfluß des Dichteverhältnisses auf die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit für Kugeln gleichen Durchmessers wieder. Bei konstanter Schwingungsintensität existiert ein optimales Dichteverhältnis. Sowohl aus der Gleichung (3.33) als auch aus der Gleichung (3.38) folgt für einen Widerstandsbeiwert $c_w = c_2$ mit der Forderung

$$\frac{\partial e}{\partial(\frac{f}{f_0})} = 0$$

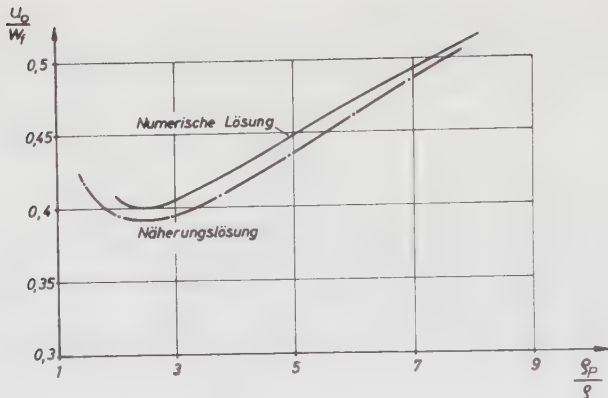


Abb. 3.3: Abbremsseffekt als Funktion des Dichteverhältnisses, $d = 2 \text{ mm}$; $A = 20 \text{ mm}$; $f = 10 \text{ Hz}$; $c_a = 0.5$; $c_H = 0$

unter Berücksichtigung von $w_f \sim \sqrt{\rho_p/\rho_f - 1}$ und der Definition von ζ nach Gl. (3.35) als notwendige Bedingung für ein optimales Dichteverhältnis

$$\frac{d}{d(\frac{\rho_p}{\rho_f})} \left[\frac{\frac{\rho_p}{\rho_f} + c_a}{\sqrt{\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1}} \right] = 0$$

$$2 \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + c_a \right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) - \left(\frac{\rho_p}{\rho_f} + c_a \right)^2 = 0$$

$$\frac{\rho_p}{\rho_f} \Big|_{\text{opt.}} = 2 + c_a \quad (3.44)$$

Bei mäßig hohen Reynoldszahlen, für die sich schon eine Beschreibung des Abbremsseffektes nach Gl. (3.33) als ausreichend erweist, ist das Optimum unabhängig von der Frequenz und der Amplitude. Eine Berücksichtigung des Stokes-Anteils im Widerstandsbeiwert führt zu einer Verschiebung des Optimums zu größeren Werten von ρ_p/ρ_f . Für Wasser als Strömungsmedium ist die angegebene Beziehung für das optimale Dichteverhältnis hinreichend genau, wenn der Kugeldurchmesser mehr als 0.8 mm beträgt.

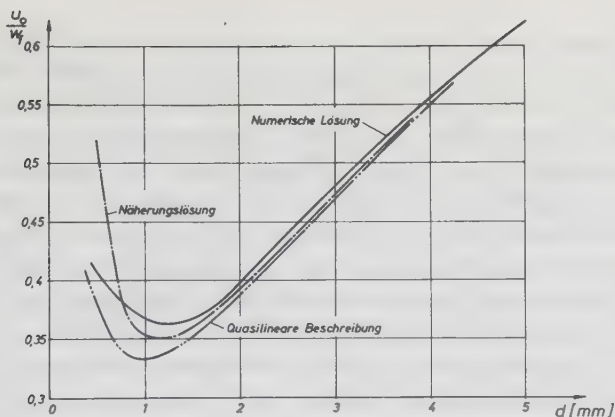


Abb. 3.4: Abbremsseffekt als Funktion des Durchmessers, $f = 10 \text{ Hz}$; $A = 20 \text{ mm}$; $\rho_p / \rho_f = 2.5$; $c_a = 0.5$; $c_H = 0$

In der Abbildung 3.4 wird die Wirkung des Durchmessers der Kugel auf den Abbremsseffekt bei konstantem Dichteverhältnis und bei fester Einstellung von Amplitude und Frequenz wiedergegeben. Der Darstellung entnimmt man, daß die Näherungslösung nach Gleichung (3.33) mit (3.34) das nach dem mathematischen Modell zu erwartende Bewegungsverhalten der Kugel für Durchmesser größer als 1 mm gut wiedergibt. Für kleinere Durchmesser und damit auch kleinere Reynoldszahlen Re_{ruh} sind die Voraussetzungen für die Näherungslösung (3.33) verletzt, wonach die Größe M im Falle wechselnder Anströmung nicht größer als 0.1 sein sollte. Für Werte von $M > 0.1$ muß auf die Gleichung (3.30) und auf die erste Gleichung des Systems (3.29) zurückgegriffen werden, da ein zweigliedriger Taylor-Ansatz (3.32) zur Beschreibung des zähen Einflusses nicht mehr ausreicht. Das unter Wahrung des Stokes- Anteils im quasistationären Strömungswiderstand aus den genannten Gleichungen ermittelte Ergebnis ist ebenfalls in das Diagramm (Abb. 3.4) miteingezeichnet.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß die Näherungslösungen die aus der Bewegungsgleichung für den eingeschwungenen Zustand folgende zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit der Kugel gut wiedergeben. Die Gleichung (3.33) beschreibt den Abbremsseffekt jedoch nur für mäßig hohe Reynoldszahlen hinreichend genau; für $M > 0.1$ wird ein Zurückgreifen auf das System (3.29) bzw. auf die Gleichung (3.30) erforderlich. Die Nullstelle der Gleichung (3.30) wird graphisch oder numerisch bestimmt. Mit diesem Zwischenergebnis kann der Abbremsseffekt nach der ersten Gleichung des Systems berechnet werden. Ähnlich wird man bei der Auswertung der quasilinearen Beziehungen der Bewegungsgleichung unter Einschluß des Basset-Terms vorgehen.

4. Versuche

Zur Beschreibung des Bewegungsverhaltens einer Kugel im vertikal harmonisch oszillierenden Strömungsfeld wird von einem Modell ausgegangen, das die Kenntnisse über die Wechselwirkung zwischen Kugel und Strömung soweit berücksichtigt, wie sie für eine auswertbare Bewegungsgleichung verwendbar sind. Ein von den Aussagen des Modells abweichendes Bewegungsverhalten deutet auf eine nicht vollständige Erfassung der wechselseitig wirkenden Strömungskräfte hin; denn an der Richtigkeit der anderen Terme in der Bewegungsgleichung kann nicht gezweifelt werden.

Auf die Schwierigkeit aus den Navier-Stokes-Gleichungen Aufschlüsse zu gewinnen ist schon hingedeutet worden. Zudem kann man auch bei einer numerischen Lösung zur Bestätigung ihrer Richtigkeit nicht auf Versuche verzichten, da die numerischen Verfahren das Strömungsfeld als rotationssymmetrisch voraussetzen.

Im Schriftum finden sich einige Arbeiten über die zeitlich mittleren und die oszillierenden Geschwindigkeitsanteile eines kugelförmigen Teilchens in einem vertikal harmonisch pulsierenden Strömungsfeld.

4.1 Literaturübersicht

Die erste experimentelle Untersuchung über das Mitschwingen von suspendierten kugelförmigen Teilchen in einer schwingenden Flüssigkeitsmasse geht auf Wagenschein [86] zurück. Seine Versuche erstreckten sich auf den Bereich kleiner Reynoldszahlen. Die Bewegungsgleichung (2.16) ist für schleichende Strömungen linear und damit die Sinkgeschwindigkeit von der Kugelschwingung unabhängig. Wagenschein bestimmte experimentell das Amplitudenverhältnis von der Bewegung kugelförmiger Teilchen und der waagrecht schwingenden Gas- oder Flüssigkeitsmasse, in der der Feststoff suspendiert war. Senkrecht zur

Fallbewegung stellte er die Amplitude der Kugelbewegung durch Ausmessen von Schwingungsbäuchen sowohl fotografisch als auch subjektiv durch Vergleich mit einem geeichten Maßstab fest. Die experimentellen Ergebnisse verglich Wagenschein mit einer Formel von König [39,40] , die mit der Gleichung (3.24) identisch ist. Die Übereinstimmung mit der Theorie war befriedigend.

Kuychoukov, Molinier, Angelino [43] berichten über Versuche zur durchschnittlichen Fallgeschwindigkeit einer Kugel in einer pulsierenden Flüssigkeitskolonne. Sie bestätigen die nach der Theorie zu erwartende Unabhängigkeit der Sinkgeschwindigkeit von der Amplitude und der Frequenz der Flüssigkeitsschwingung bei $Re < 1$.

Die Schlüsse, die aus der Bewegungsgleichung für die zähe Umströmung der Kugel zu ziehen sind, sind sämtlich experimentell bestätigt worden, so daß eine Übertragung dieser Gleichung z.B. auf turbulente Strömungsfelder gerechtfertigt erscheint. Die für Reynoldszahlen größer als eins vorliegenden Versuchsergebnisse lassen nur auf eine begrenzte Gültigkeit der quasistationären Bewegungsgleichung schließen.

Baird, Senior, Thompson [3] stellten experimentell die mittlere Fallgeschwindigkeit von Nylon- und Acrylkugeln von 1/8, 1/4 und 1/2 Zoll Durchmesser in einer pulsierenden Wassersäule fest. Die Flüssigkeitssäule einer Kolonne mit U-rohrförmigen Ansatz wurde durch periodische Luftdruckveränderung an einem Kolonnenschenkel vertikal pulsierend bewegt. Die Pulsationsfrequenzen lagen zwischen 2.37 Hz bei einer Amplitude von 1.1 Zoll und 0.88 Hz bei einer Amplitude von 4 Zoll. Eine Abschätzung für die oszillierende Rohrströmung zeigt, daß dem Strömungsprofil in der Kolonne Grenzschichtcharakter zugesprochen werden muß. Baird weist aber auf große Schwierigkeiten, die Amplitude der Bewegung über den Beobachtungszeitraum eines Versuchs konstant zu halten, hin. Fraglich bleibt damit, ob eine sinusförmige Schwingung der Flüssigkeit überhaupt vorgelegen hat. Symmetrieabweichungen im Geschwindigkeitsgesetz der Pulsation lassen nach der quasistationären Bewegungsgleichung eine wesentlich andere

durchschnittliche Sinkgeschwindigkeit erwarten. - Die Geschwindigkeiten der Kugeln wurden aus der Zeit zum Durchfallen einer Meßstrecke berechnet. Die Mehrdeutigkeit der vertikalen Position als Funktion der Zeit (siehe Abb. 4.7) bringt zusätzliche meßtechnische Schwierigkeiten mit sich. Baird stellt abschließend seine Versuchsergebnisse als Funktion der dimensionslosen Gruppe

$$\frac{f \cdot d}{w_f} \left(\frac{A}{d} \right)^{1/3}$$

dar.

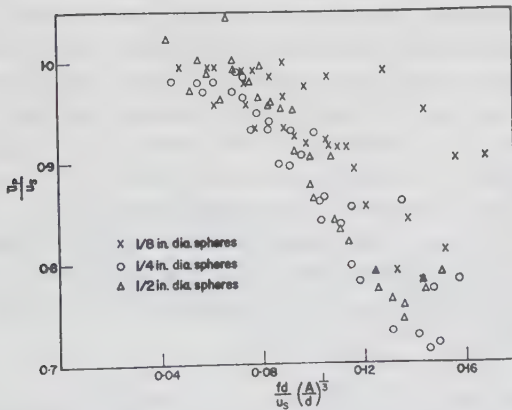


Abb. 4.1 Versuchsergebnisse von Baird e.a.

Generell stellt Baird eine stärkere Abbremsung fest als nach der quasistationären Bewegungsgleichung zu erwarten gewesen wäre. Die Versuche von Baird erfassen überwiegend die gleichgerichtete Anströmung der Kugel. Nach der Näherungslösung wird in diesem Fall die Verringerung der durchschnittlichen Sinkgeschwindigkeit im wesentlichen durch die maximale Beschleunigung $A\omega^2$ der Flüssigkeitssäule bestimmt. Die Gewichtung der Amplitude gegenüber der Frequenz sollte daher stärker ausfallen. Wegen der genannten Unzulänglichkeiten der Versuchsanordnung sind die Versuchsergebnisse mit Vorbehalt zu werten.

Tunstall und Houghton [80] bestimmten nach der gleichen Meßmethode wie Baird und Mitarbeiter die zeitlich mittlere Fallgeschwindigkeit von Saphir- und Glaskugeln mit Durchmessern von 0.794 mm bis 4.76 mm. Ihre Versuchsapparatur war für hohe Frequenzen bei kleinen Amplituden des Strömungsfeldes ausgelegt. Ein mit Wasser gefüllter Zylinder von 3.2 cm Durchmesser und 150 cm Länge wurde durch einen Vibrator pulsierend mit Amplituden bis 1 cm und Frequenzen bis 50 Hz auf und ab bewegt. Da die Schwingungen des Zylinders mit einem dynamischen System erzeugt werden, sind geringe Abweichungen von der sinusförmigen Erregung nicht zu vermeiden. Ihre Ergebnisse vergleichen die Autoren leider mit Aussagen der Bewegungsgleichung für eine Widerstandsbeiwert-Approximation $c_w = c_2$ und nicht mit genauen Lösungen dieser Gleichung für einen quasistationären Widerstand. In der von Tunstall gewählten Darstellung zeigen die Versuchsergebnisse einen bedeutend stärkeren Abbremsseffekt auf als nach dem Modell zu erwarten wäre. Sie führen die Unstimmigkeiten z. T. auf eine Phasenverzögerung von dynamischen Auftrieb und der scheinbaren Masse gegenüber der Erregung des Systems zurück, was physikalisch wenig sinnvoll erscheint und sich durch ihre Versuche kaum belegen läßt.

Field [21] bestimmte die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit von zwei Kunststoffkugeln (3.17 mm und 6.35 mm Durchmesser) und einer Glaskugel (3 mm Durchmesser) in einem vertikal harmonisch bewegten, wassergefüllten Zylinder durch Fotografieren der stroboskopisch mit der Frequenz der Pulsation angeblitzten Kugel. Die Variation der Schwingung beschränkte sich auf Amplituden kleiner als 1 Zoll und Frequenzen kleiner als 9 Hz. Auch Field stellt eine bedeutend stärkere Sinkgeschwindigkeitsabnahme als nach der quasistationären Bewegungsgleichung zu erwarten wäre fest.

Die bemerkenswerteste Arbeit über die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit stammt von Ho und Brush [11,30]. Ein allseits abgeschlossener und mit Flüssigkeit gefüllter Zylinder wird näherungsweise sinusförmig auf und ab bewegt. Die Schwingung des Zylinders wird mittels Schubkurbeltrieb eingeleitet. Damit

ist das Zeitgesetz des Strömungsfeldes nicht symmetrisch.- Auf die Bedeutung von einer Asymmetrie im Zeitgesetz der Pulsation wird im Abschnitt 5 noch eingegangen.- Ho hielt die Positionen der Kugel durch stroboskopisches Anleuchten im Dunkelfeld auf einem Film fest und bestimmte aus der Verschiebung die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit. Die Amplitude des Strömungsfeldes konnte stufenweise von 1/2 Zoll bis 2 Zoll und die Frequenz von 3.5 Hz bis 6.8 Hz variiert werden. Die Durchmesser der untersuchten Stahlkugeln betrugen 1 mm, 1.59 mm und 3.17 mm, die der Glaskugeln 1.2 mm und 3.5 mm. In der Abbildung 4.2 ist für eine Stahlkugel von 1 mm Durchmesser die in Abschnitt 3.2 dieser Arbeit angegebene Näherungslösung der quasistationären Bewegungsgleichung für eine Frequenz von 5.2 Hz über die Amplitude eingezeichnet. Die schraffierte Linie grenzt die Lösung der gleichgerichteten von der Lösung der wechselnden Anströmung ab. Die Versuchswerte von Ho sind als Kreise eingezeichnet.

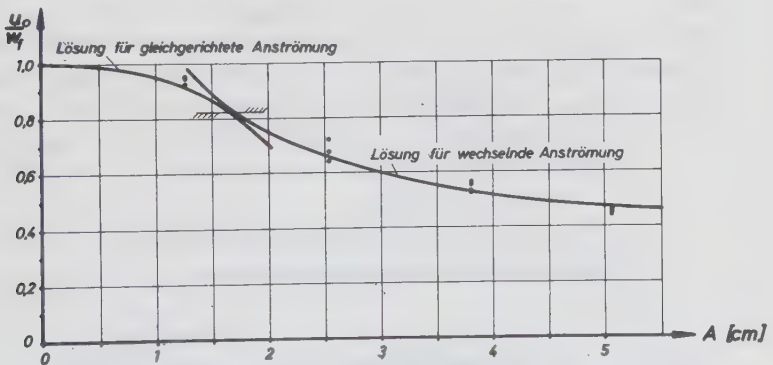


Abb. 4.2 Gegenüberstellung von Näherungslösung und Versuchsergebnissen von Ho ($d = 1$ mm, $Re_{ruh} = 390$, $c_a = 0.5$, $f = 5.2$ Hz, $\rho_p/\rho_f = 7.72$)

Die Übereinstimmung ist ausgezeichnet. Wie im Kapitel 3.4 erörtert, bewertet die Näherungslösung den Abbremsseffekt zu stark. Die Art der Asymmetrie des Zeitgesetzes der Pulsation

in Ho's Versuchsapparatur bewirkt eine etwas stärkere Verringerung der zeitlich mittleren Sinkgeschwindigkeit, so daß die Versuchsergebnisse besser durch die Näherungslösung als durch die genaue Lösung beschrieben werden. Eine Übereinstimmung der Aussagen der quasistationären Bewegungsgleichung mit den Versuchsergebnissen ist aber nicht in allen Versuchsreihen von Ho zu verzeichnen. Die Abbildung 4.3 gibt eine andere Versuchsreihe in der von Ho gewählten Darstellung wieder. Die Sinkgeschwindigkeit ist bis über 30 % geringer als nach der Theorie vorausgesagt wird. Die Tendenz der Versuchsergebnisse wird aber durch die numerische Lösung erfaßt.

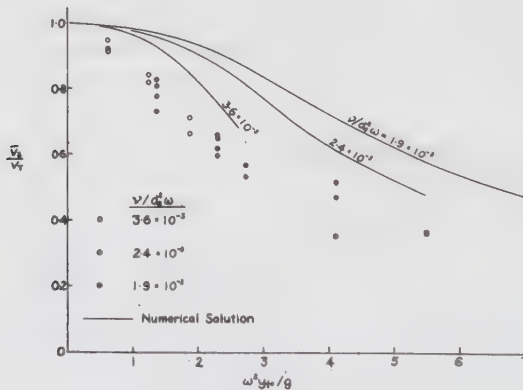


Abb. 4.3 Versuchsergebnisse von Ho , $Re_{ruh} = 1300$

Das deutet darauf hin, daß die Amplitude den Strömungszustand weniger beeinflusst als die Frequenz.

El-Tawil [18] filmte die Bewegung einer Kugel in einem flüssigkeitsdurchströmten Rohr von 20 mm Durchmesser, das gleichzeitig einer vertikalen Schwingung ausgesetzt wurde. Die Strömungsgeschwindigkeit wurde so gewählt, daß die Sedimentationsgeschwindigkeit der Kugel kompensiert wurde. Die Frequenz wurde zwischen 12 Hz und 50 Hz, die Amplitude zwischen 1.6 mm und 6.7 mm verändert.

Die Messungen von El-Tawil sind wegen eines Zufallfehlers von 5.5 % in der Geschwindigkeit der Flüssigkeit nicht sehr genau. Eine Verfälschung der Ergebnisse durch den von der Förderpumpe verursachten, schwankenden Flüssigkeitsdurchsatz ist sehr wahrscheinlich, so daß die Aussagekraft dieser Versuche angezweifelt werden kann. Zur Vergleichmäßigung des Strömungsprofils in der Meßzelle befinden sich vor und nach der Meßstrecke Siebe im Rohrquerschnitt, so daß die Kugel einer turbulenten Anströmung ausgesetzt wird. Der Widerstand eines Körpers wird durch den Turbulenzgrad der Anströmung nicht unwesentlich beeinflusst. El-Tawil kommt zu dem Ergebnis, daß sich das Amplitudenverhältnis besser durch eine Bewegungsgleichung unter Einschluß des Basset-Terms beschreiben läßt. Die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit unterzieht er wegen mangelnder Versuchsgenauigkeit keiner Analyse.

Molinier, Kuychoukov und Angelino [55] berichten über zwei Versuchsreihen zur zeitlich mittleren Sinkgeschwindigkeit in einer pulsierenden Kolonne bei ablösender Kugelumströmung. Die Geschwindigkeit wurde aus Filmaufnahmen bestimmt. Die Abbildung 4.4 gibt eine Versuchsreihe von Molinier wieder.

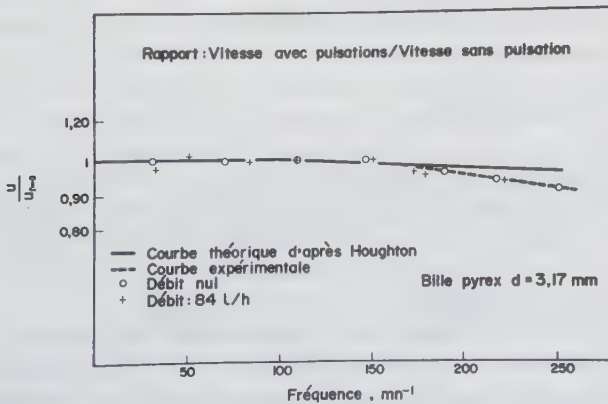


Abb. 4.4 Versuche von Molinier e.a., $Re_{ruh} = 1310$

Die Frequenzen und Amplituden der pulsierenden Bewegung sind bei den Versuchen von Molinier e.a. so klein ($f < 5$ Hz, $A < 1.5$ cm), daß nach der Bewegungsgleichung keine merkliche Verringerung der Sinkgeschwindigkeit zu erwarten ist. Bis zu einer Frequenz von 164 U/min bzw. 2.73 Hz stimmen die Versuchsergebnisse mit dem nach der Theorie erwarteten Wert überein, danach nimmt der gemessene Abbremsseffekt geringere Werte an.

Die vorliegenden experimentellen Ergebnisse lassen kein einheitliches Bild des Bewegungsverhaltens von suspendierten kugelförmigen Feststoffteilchen in einem zeitlich veränderlichen Strömungsfeld bei höheren Reynoldszahlen zu. Die Autoren der genannten Arbeiten verweisen darauf, daß weitere Versuche notwendig sind, um die komplizierte Wechselwirkung zwischen dem Strömungsmedium und den Feststoffteilchen verstehen zu können.

Die Schwierigkeit dieser Versuche besteht darin, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen der Kugel und der Flüssigkeit wegen des der Strömung frei überlassenen kugelförmigen Teilchens nicht unmittelbar meßtechnisch zugänglich ist. Eine Übertragung von Versuchsergebnissen, die an geführten, in einer Flüssigkeit schwingenden Körpern gefunden werden, ist nur mit Vorbehalt möglich, da die Freiheitsgrade der Körperbewegung durch die Führung eingeschränkt werden.

4.2 Der Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in der Abbildung 4.5 schematisch dargestellt. Zur experimentellen Überprüfung des Bewegungsverhaltens einzelner Kugeln in einem nach einer einfachen harmonischen Bewegung veränderlichen Strömungsfeld ist am Institut für Mechanische Verfahrenstechnik der Universität Erlangen eine "Schüttelmaschine" konstruiert und gebaut worden. Ein mit Flüssigkeit vollständig gefüllter und dicht abgeschlossener durchsichtiger Zylinder von 42 mm Durchmesser und 40 cm Länge wird vertikal sinusförmig auf- und abbewegt.

Diese Bewegung wird mittels eines Exzentertriebes aus einer Drehbewegung konstanter Frequenz erzeugt. Exzenter verschiedener

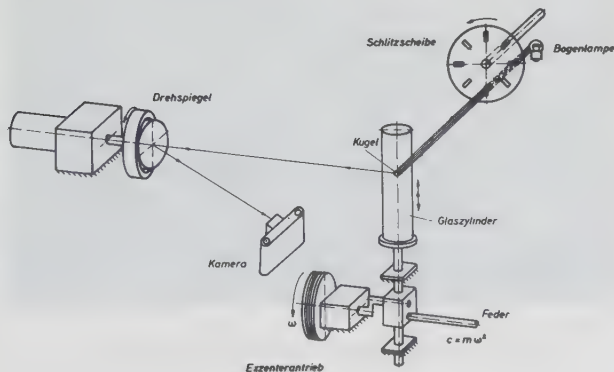


Abb. 4.5 Versuchsanordnung

Exzentrizität von 2 mm bis 10 mm ermöglichen eine stufenweise Variation der Amplitude des oszillierenden Strömungsfeldes. Die Drehzahl des Antriebmotors und damit die Frequenz der Pulsation kann im Bereich von 4 Hz bis 50 Hz stufenlos geregelt werden.

Zum Ausgleich der hin- und hergehenden Massenkräfte wird an den Zylinderfuß eine Biegefeder angelenkt, deren Biegesteifigkeit durch Verschieben eines Lagerbockes variiert und somit den verschiedenen Drehzahlen angepaßt werden kann. So wird eine weitgehende Entlastung des Motors von einem periodischen Drehmoment erreicht. Aus Festigkeitsgründen können Amplitude und Frequenz nicht beliebig variiert werden, sondern sind auf eine Beschleunigungsziffer von

$$A\omega^2/g < 24 \quad \text{eingeeengt.}$$

Die Bewegung des Zylinders wird zur Kontrolle mittels Weg-aufnehmer auf einen Oszillographenschirm abgebildet. Die Abbildung 4.6 gibt eine derartige Anzeige wieder. Die Ordinate entspricht der vertikalen Position des Zylinders, die Abszisse der Zeit. Beide Koordinaten weisen lineare Teilung auf.

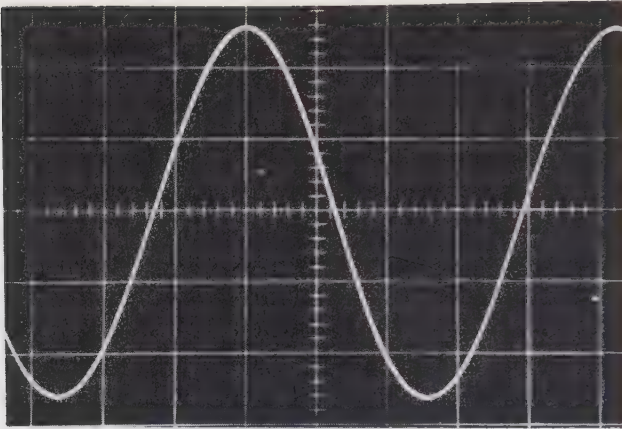


Abb. 4.6 Bewegung des Zylinders

Innerhalb des abgeschlossenen mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß-
raumes befindet sich im Zylinderkopf ein Kugelmagazin, das bis
zu 11 Kugeln aufnehmen kann. Durch einen elektromagnetischen
Impuls wird die Trommel des Magazins um 30° gedreht. Eine
Magazinbohrung, in der eine Kugel eingelagert ist, wird über
eine Öffnung im Magazinboden geschoben. Unter dem Einfluß der
Schwerkraft gelangt die Kugel aus dem Magazin in den Zylinder.

Der Zylinder wird seitlich von einer Bogenlampe (500 W
Leistung) beleuchtet. Da nur ein schmaler Bereich um die
Zylindermitte beleuchtet werden soll, befindet sich eine
Schlitzblende und ein Linsensystem im Strahlengang der Licht-
quelle. Zwischen der Lichtquelle und dem Zylinder ist ferner
im Strahlengang eine Schlitzscheibe angeordnet. Die Scheibe
weist 36 Schlitzte gleicher Breite und gleichen Abstandes auf.
und wird durch einen Motor hoher Gleichlaufeigenschaft mit
400 U/min - in einigen Fällen mit 800 U/min - angetrieben.
Das Strahlenbündel wird so in Lichtblitze mit der Frequenz von
 $36 \text{ Blitze/Umdr.} \cdot 400 \text{ Umdr}/(60 \text{ sek}) = 240 \text{ Hz}$
zerhackt.

Der Versuchsstand befindet sich in einem abgedunkelten Raum,
in den nur durch einen Schlitz im Verdunkelungsvorhang Lichtblitze
der Bogenlampe einfallen. Sedimentiert eine Kugel im Zylinder

so erscheint sie bei der Dunkelfeldbeleuchtung als ein helles Scheibchen. Wegen der Blitzfrequenz von 240 Hz ist der Zeitabstand zweier aufeinanderfolgender Positionen der Kugel $1/240$ sek (bei 800 Umdr/min der Schlitzscheibe, $1/480$).

4.3 Das Meßverfahren

Im periodisch veränderlichen Strömungsfeld wird die Absolutgeschwindigkeit der Kugel neben dem Grundanteil einen oszillierenden Geschwindigkeitsanteil aufweisen. Die Kugel kann also u.U. zu verschiedenen Zeitpunkten die gleiche Position einnehmen.

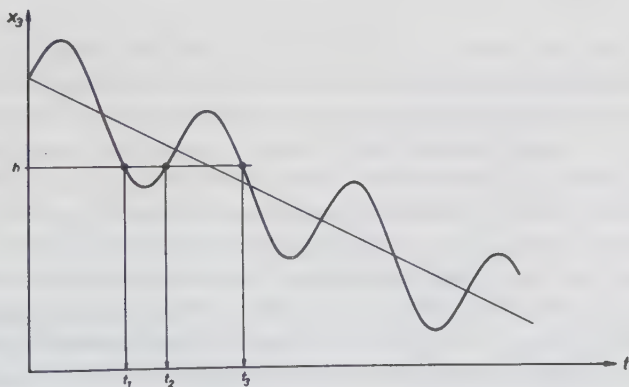


Abb. 4.7 Höhe x_3 einer Kugel im oszillierenden Strömungsfeld als Funktion der Zeit t

In der Abbildung 4.7 ist die zeitliche Abhängigkeit der Höhe einer Kugel dargestellt. Die Höhe $x_3 = h$ wird dreimal, zu den Zeiten t_1 , t_2 , t_3 , angenommen. Das Meßverfahren muß ein berührungsloses Feststellen der Kugelposition und eine zeitliche Auflösung von mehrmals eingenommenen Positionen ermöglichen.

Die zeitliche Auflösung der Kugelposition kann z.B. durch Auswertung eines Filmes von einer Hochgeschwindigkeitskamera

erreicht werden, indem Bild für Bild die Kugelposition ausgemessen und die Bildfrequenz als Maß für die Zeit herangezogen wird. Dieses Verfahren ist von El-Tawil [18] und Molinier e.a. [55] gewählt worden. Ho [30] verwendete ein anderes Meßverfahren, dessen Anwendung auf niedrige Frequenzen des Strömungsfeldes begrenzt ist. Ein Fotoapparat wird seitlich bei geöffneten Verschuß an der Meßstrecke vorbeigezogen. Auf dem Film erscheinen die nacheinander eingenommenen Positionen der Kugel nebeneinander. Die Aufnahme ist bei konstanter Geschwindigkeit der Abb. 4.7 ähnlich. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Kamera zu fixieren und eine seitliche Ablenkung der Kugelbahn durch eine Spiegelbewegung zu erreichen [19,20,26]. Diese Meßanordnung ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit gewählt worden.

Wie in der Abbildung 4.5 gezeigt, ist ein Drehspiegel im Strahlengang zwischen der Kamera und der Kugel angeordnet. Die Reflexionsebene des Spiegels (Durchmesser 100 mm, 15 mm dick, Ebenheit $\lambda/4$) bildet mit der Drehachse keinen rechten Winkel, sondern zwischen der Normalen der Reflexionsebene und der Drehachse wird ein Winkel von annähernd 3 Grad eingeschlossen. Der Spiegel wird durch einen geregelten Kleinmotor mit konstanter Frequenz (4, 5, 6 Hz) angetrieben. Bei einer Drehung des Spiegels taumelt die Reflexionsebene. Diese Taumelbewegung verursacht nun eine seitliche wie auch eine vertikale scheinbare Verzerrung der Kugelbahn. Gleiche Positionen zu unterschiedlichen Zeiten werden mittels Drehspiegel in örtlich verschiedene Positionen auf dem Film abgebildet.

4.31 Die Abbildungsbeziehung des Drehspiegels

In der Abbildung 4.8 sind die wesentlichen Elemente der Meßanordnung skizziert. Das Koordinatensystem liegt mit seinem Ursprung in der Kamera und ist so orientiert, daß eine Koordinatenachse parallel zur Drehachse des Spiegels - in der Abb. mit "1" bezeichnet - und eine Koordinatenachse parallel zur Zylindermittte - in der Abb. mit "3" bezeichnet - liegt.

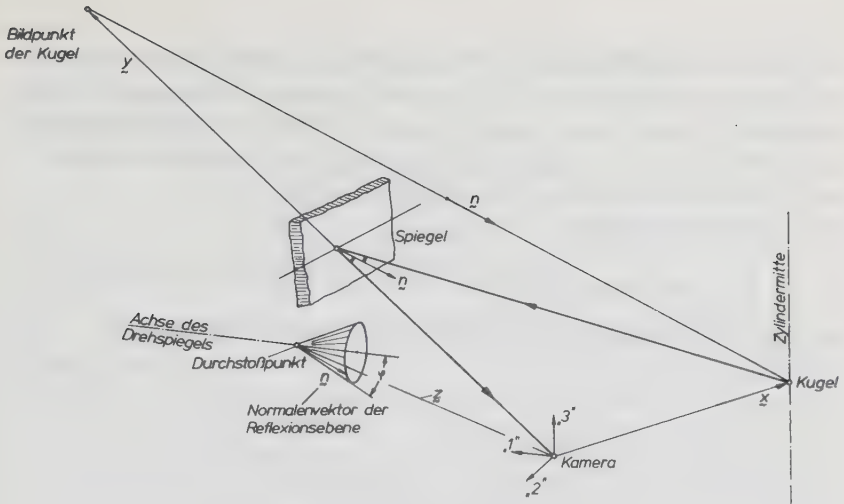


Abb. 4.8 Meßanordnung

Darüberhinaus soll ein Rechtssystem gebildet werden. Die Ortsvektoren zur Kugel werden mit $\underline{x}$, zum Bildpunkt der Kugel mit $\underline{y}$ bezeichnet. Der Ortsvektor zum Durchstoßpunkt der Drehachse des Spiegels mit der Reflexionsebene sei $\underline{z}$. Die Vektoren $\underline{y}$ und $\underline{x}$ sind Funktionen der Zeit, $\underline{z}$ ist ein konstanter Vektor.

Während der Reflexionspunkt für das physikalische Geschehen wichtig ist, sind nur die Koordinaten des Bildpunktes, der für die fotografische Aufnahme maßgeblich ist, und die Ortskoordinaten der Kugelposition von besonderem Interesse. Die funktionale Verknüpfung des Bildpunktes der Kugel mit der Kugelposition stellt die Abbildungsbeziehung dar.

Der Winkel zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahl wird von der Normalen $\underline{n}$ der Reflexionsebene halbiert. Zudem liegen einfallender und reflektierter Strahl und der Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ in einer Ebene. Die Entfernung des Bildpunktes der Kugel von der Kamera ist gleich der Entfernung der Kugel über den Lichtweg gemessen. Es gilt demnach

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{x} + 2\lambda \cdot \underline{n} \\ \lambda &= (\underline{z} - \underline{x}) \cdot \underline{n} \end{aligned}$$

(4.1)

Der Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ schließt mit der Drehachse des Spiegels den Winkel φ ein. Bei einer Drehung des Spiegels beschreibt $\underline{n}$ den Mantel eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel φ . Mit δ der aus der Anfangslage resultierenden Phase und γ der Kreisfrequenz des Drehspiegels gilt für den Normaleneinheitsvektor

$$\underline{n} = (-\cos\varphi, \sin\varphi \cdot \sin(\gamma t + \delta), \sin\varphi \cdot \cos(\gamma t + \delta)) \quad (4.2)$$

Aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) folgt die Abbildungsbeziehung

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2(z_1 - x_1) \cos^2\varphi + f_1 \\ y_2 &= x_2 - 2(z_1 - x_1) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\gamma t + \delta) + f_2 \\ y_3 &= x_3 - 2(z_1 - x_1) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\gamma t + \delta) + f_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die zur Abkürzung eingeführten Größen f_1, f_2, f_3 bedeuten

$$\begin{aligned} f_1 &= -2(z_1 - x_1) \sin^2\varphi \cdot \sin^2(\gamma t + \delta) - 2(z_2 - x_2) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\gamma t + \delta) \\ f_2 &= 2(z_1 - x_1) \sin^2\varphi \cdot \sin^2(\gamma t + \delta) + 2(z_2 - x_2) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\gamma t + \delta) \\ f_3 &= 2(z_1 - x_1) \sin^2\varphi \cdot \sin^2(\gamma t + \delta) + 2(z_3 - x_3) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\gamma t + \delta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Durch eine geeignete Anordnung von Drehspiegel, Kamera und Versuchsstrecke können die Differenzen der Koordinaten $(x_2 - z_2)$ und $(x_3 - z_3)$ klein gehalten werden. Wird ein kleiner Wert des Auslenkwinkels φ der Reflexionsebene eingestellt, dann nehmen die Größen f_1 bis f_3 im Vergleich zu den Koordinaten y_1 bis y_3 geringe Werte an. Verschwinden werden diese Größen jedoch nicht; denn für das Meßverfahren ist einerseits ein endlicher Wert des Winkels φ notwendig und andererseits kann die Koordinatendifferenz $x_3 - z_3$ wegen der zeitlich veränderlichen Position x_3 der Kugel nicht stets verschwinden. Es können aber so geringe Werte von f_1 bis f_3 erreicht werden, daß bei der Auswertung einer fotografischen Aufnahme eine um die Größen f_1, f_2, f_3 reduzierte Beziehung (4.3) verwendet werden kann.

Unter der Voraussetzung, daß die Größen f_i gegen y_i vernach-

lässigt werden können, würde die Abbildung eines ortsfesten Punktes $x_1 = \text{konst.}$, $x_2 = \text{konst.}$, $x_3 = \text{konst.}$ mittels Drehspiegel einen Kreis

$$(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = r^2$$

mit dem Radius $r = 2|z_1 - x_1| \sin\varphi \cos\varphi$ in der Ebene $y_1 = x_1 - 2(x_1 - z_1)\cos^2\varphi$ ergeben.

Eine mit konstanter Geschwindigkeit u_0 die Meßstrecke geradlinig durchfallende Kugel, $x_1, x_2 = \text{konst.}$; $x_3 = h - u_0 t$ wird in

$$y_1 = \text{konst.}$$

$$y_2 = x_2 - 2(z_1 - x_1) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\varphi t + \delta)$$

$$y_3 = h - 2(z_1 - x_1) \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\varphi t + \delta) - u_0 t$$

d.h. je nach der Geschwindigkeit u_0 als eine verkürzte oder verlängerte Zykloide (siehe Abb. 4.9) abgebildet.

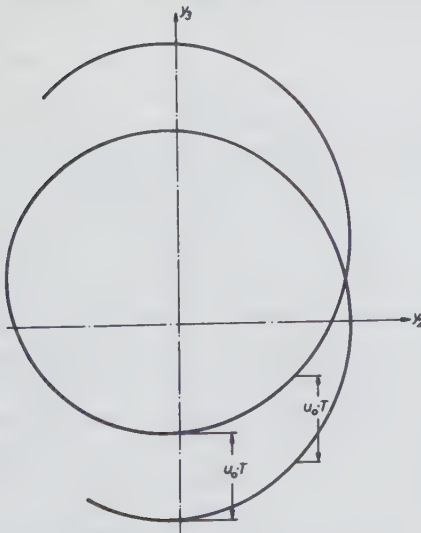


Abb. 4.9: Bildkurve einer sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegend Kugel

Die Geschwindigkeit u_0 der Kugel verursacht eine gleichmäßige Verschiebung der Punkte des Abbildungskreises. Nach einer Umdrehungszeit T nimmt der Spiegel wieder die gleiche Position ein; der Bildpunkt der Kugel verschiebt sich um $-u_0 T$ in Richtung der y_3 -Koordinate.

Ein nach einer einfachen harmonischen Bewegung geradlinig um seine Ruhelage oszillierender Punkt

$$x_1, x_2 = \text{konst.}, \quad x_3 = h - A \sin \omega t$$

wird mittels Drehspiegel in

$$y_1 = \text{konst.}$$

$$y_2 = x_2 - 2(z_1 - x_1) \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\gamma t + \delta)$$

$$y_3 = h - 2(z_1 - x_1) \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\gamma t + \delta) - A \cdot \sin \omega t$$

abgebildet. Beträgt die Kreisfrequenz ω der oszillierenden Bewegung ein ganzes Vielfaches der Kreisfrequenz γ des Drehspiegels

$$\omega = m \gamma \quad ; \quad m \text{ ganze Zahl}$$

dann ist das mittels Drehspiegel erzeugte Bild eine in sich geschlossene Kurve. Die Abbildung 4.10 gibt für $m = 3$ und für eine Amplitude A deren Wert $1/7$ des Abbildungsradius beträgt, die Bildkurve wieder.

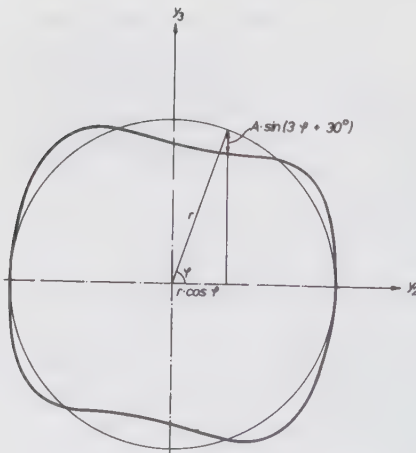


Abb. 4.10: Bildkurve eines oszillierenden Punktes

Die oszillierende Bewegung führt zu einer Deformation des Abbildungskreises.

Die Geschwindigkeit einer im pulsierenden Strömungsfeld sedimentierenden Kugel setzt sich, von der Anfangsphase der Bewegung abgesehen, aus einem konstanten und einem oszillierenden Anteil zusammen. Die Abbildung der Kugelbahnkurve wird demnach eine durch den oszillierenden Anteil verzerrte Zykloide ergeben.

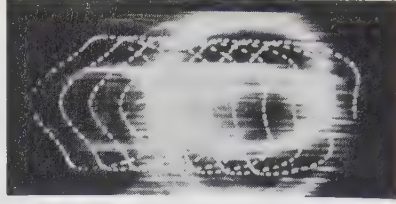
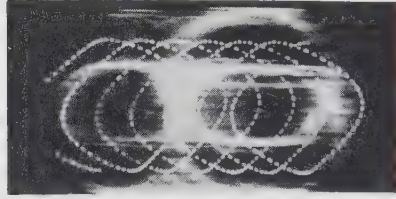
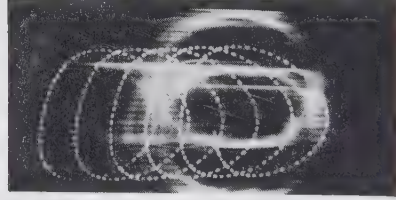
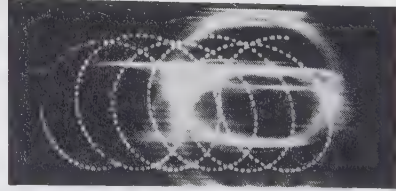
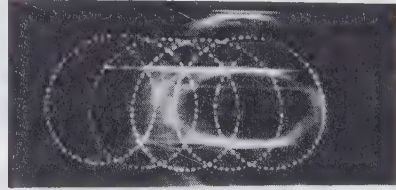
4.32 Die Auswertung

Das Ergebnis eines Versuchs ist ein belichtetes Negativ, das die gesamte Information über den Bewegungsablauf enthält. Die Positionen der Kugel, im Zeitabstand von $1/240$ sek, werden mit Hilfe eines Vergrößerungsapparates auf Millimeterpapier übertragen und ausgemessen. Die Abbildung 4.11, Seite 54, zeigt Aufnahmen von einer in ruhender Flüssigkeit und im pulsierenden Strömungsfeld sedimentierenden Kugel zu 4 Hz, 8 Hz, 12 Hz und 16 Hz. Die Amplitude des Strömungsfeldes beträgt $A = 10$ mm. Die Frequenz des Drehspiegels beträgt für alle Aufnahmen 4 Hz. Wenn die Frequenz der Zylinderschwingung ein ganzes Vielfaches der Frequenz des Drehspiegels ist - wie bei den Aufnahmen der Abb. 4.11 - , weisen die Fotografien der Kugelbahn ein regelmäßiges Muster auf, das leichte Kontrollmöglichkeiten bei der Auswertung bietet.

Gesucht werden die zeitlich mittlere Geschwindigkeit u_0 und die Amplitude u_1 des oszillierenden Geschwindigkeitsanteils. Die mittlere Geschwindigkeit u_0 ist in der Verschiebung der Zykloiden pro Spiegelumdrehung, die Geschwindigkeit u_1 in der Deformation der Zykloidengestalt enthalten. Zur Ermittlung der Geschwindigkeiten u_0 , u_1 ist, da das Negativ ähnlich vergrößert wird, noch der Maßstab der Vergrößerung erforderlich, der i.a. bei den ausgewerteten Bildern etwa 1.2:1 beträgt.

In dem Meßverfahren liegt begründet, daß die anfängliche Winkelstellung δ des Spiegels zu dem ersten ausgemessenen

Bildkurven einer Kugel von $2,5\text{ mm } \phi$
 Amplitude 1 cm



Frequenz:

Zylinder: 0 Hz

Drehspiegel: 4 Hz

4 Hz

4 Hz

8 Hz

4 Hz

12 Hz

4 Hz

16 Hz

4 Hz

Punkt der Zyklode unbekannt ist. Bei Kenntnis des Auslenkwinkels φ der Reflexionsebene, dem Vergrößerungsmaßstab und der Koordinaten x_1, z_1 ist es zwar möglich den Abbildungsradius r zu berechnen, aber es ist vorgezogen worden diesen Radius aus den vermaßten Punkten der Bildkurve selbst zu bestimmen und das Ergebnis mit dem aus der Geometrie der Meßanordnung berechneten Wert zu vergleichen. Für die Auswertung ist es zudem hinreichend genau die um die f_1 -Größen verkürzte Abbildungsbeziehung (4.3) zur Entzerrung der Bildkurve heranzuziehen.

Die Koordinate y_1 ist für die Auswertung ohne Bedeutung; denn y_1 gibt die Entfernung der Bildkurven-Ebene von der Kamera an, ist also nur für die Entfernungseinstellung der Kamera wichtig. Die Koordinaten y_2 und y_3 beschreiben bis auf einen Maßstabsfaktor die fotografierten Bildkurven. Aus Gl. (4.3) folgt mit $r = 2|z_1 - x_1| \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ und $a = -r \sin \delta$; $b = -r \cos \delta$

$$\begin{aligned} y_2 &= x_2 + a \sin \gamma t + b \cos \gamma t \\ y_3 &= x_3 + a \cos \gamma t - b \sin \gamma t \end{aligned} \quad (4.5)$$

Die Koordinaten der Zyklode ($y_2; y_3$) werden für jeden Punkt der Bildkurve ausgemessen. Die Bewegung der Kugel im pulsierenden Strömungsfeld wird durch die Koordinaten x_2, x_3 beschrieben. Diese Koordinaten erhält man, wenn die durch den Drehspiegel verursachte Verzerrung der Bildkurve eliminiert wird. Da bei der Vermaßung der Bildkurve ein zufallsbedingter Fehler nicht zu vermeiden ist, werden aus den Werten der Querkoordinate y_2 nach der Methode des kleinsten Fehlerquadrates die Abbildungsparameter a und b bestimmt.

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (y_{2,j} - x_{2,j} - a \cdot \sin \gamma t_j - b \cdot \cos \gamma t_j)^2 = \text{Min.}$$

Die Anzahl der Schlitze der Schlitzscheibe, die Drehzahl der Schlitzscheibe sowie die Drehzahl des Spiegels sind so gewählt worden, daß pro Spiegelumdrehung eine gerade Anzahl von Punkten der Bildkurve entfallen; so bei einer Spiegeldrehzahl von

4 Hz 60 Punkte/Spiegelumdrehung

5 Hz	48 Punkte/Spiegelumdrehung
6 Hz	40 Punkte/Spiegelumdrehung

Ausgewertet werden 3 bis 4 Umläufe der Zykloiden, d.h.
 $2 N = 160$ bis 192 Punkte pro Versuch; der Beobachtungszeitraum erstreckt sich auf $2 N/240$ sek, also auf $2/3$ sek bis 0.8 sek.

Bei einer geraden Zahl von ausgewerteten Punkten pro Spiegelumdrehung vereinfacht sich wegen der Summenorthogonalität von Sinus- und Cosinus-Funktionen die Ausgleichsrechnung. Unter der Voraussetzung, daß die Kugelkoordinate x_2 nicht mit den Funktionen $\sin y_t$ und $\cos y_t$ korreliert ist - dies ist z.B. der Fall, wenn die Kugel geradlinig fällt, $x_2 = \text{konst.}$ -, erhält man die Ausgleichsbeziehungen ($2 N$ Anzahl der ausgewerteten Punkte)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N-1} y_{2,j} &= \sum_{j=0}^{2N-1} x_{2,j} \\ \sum_{j=0}^{2N-1} y_{2,j} \sin y_{t,j} &= a^* N \\ \sum_{j=0}^{2N-1} y_{2,j} \cos y_{t,j} &= b^* N \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Schätzwerte für die Abbildungsparameter a , b sind demnach

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} y_{2,j} \cdot \sin y_{t,j} \\ b^* &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} y_{2,j} \cdot \cos y_{t,j} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die erste Ausgleichsbeziehung Gl. (4.6) wird zur Ermittlung der vertikalen Koordinate x_3 der Kugelbahn nicht benötigt.

Aus den Werten der Koordinate y_3 erhält man mit den Schätzwerten a^* und b^* die Schätzwerte $x_3^*(t)$ für die gesuchten Werte der vertikalen Koordinate x_3 des Kugelweges im pulsierenden Strömungsfeld.

$$x_3^* = y_3 - a^* \cos y_t + b^* \sin y_t$$

In der Abbildung 4.12 sind die Ergebnisse dieser Rechnung für einen konkreten Versuch dargestellt. Die Spiegelfrequenz

beträgt 4 Hz, die Frequenz des oszillierenden Strömungsfeldes 16 Hz, die Amplitude 1 cm. In der oberen Hälfte der Abb. 4.12

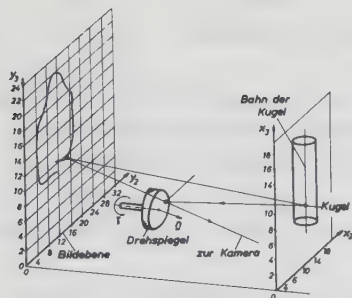
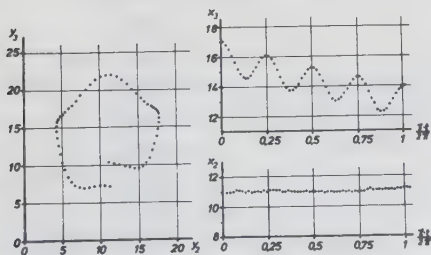


Abb. 4.12: Auswertung
der Bildkurve



ist axionometrisch die Kugelbahn sowie die Bildkurve gezeichnet. Der in der unteren linken Bildhälfte dargestellte Bildkurventeil ist ein Ausschnitt aus der vergrößerten Fotografie des Versuchs und entspricht der Bildkurve in der axionometrischen Darstellung. Die rechte untere Hälfte gibt die aus dem Bildkurventeil berechneten Schätzwerte der vertikalen Position x_3^* und der seitlichen Position x_2^* als Funktion der auf die Umdrehungsdauer des Drehspiegels bezogenen Zeit t wieder. Pro Spiegelumdrehung führt die Kugel 4 Schwingungen aus.

Von der anfänglichen Beschleunigungsphase der Kugelbewegung abgesehen, ist die Kugelgeschwindigkeit eine mit der Frequenz des Strömungsfeldes wiederkehrende Funktion. Die höheren Harmonischen der Kugelgeschwindigkeit sind im Vergleich zur Grundgeschwindigkeit so gering, daß eine Erfassung wegen des

Zufallfehlers, der den Koordinatenwerten $y_{3,j}$ anhaftet, nicht sinnvoll erscheint. Für die Position der Kugel x_3 als Funktion der Zeit wird deshalb von

$$x_3 = u_0 t + s_{11} \sin \omega t + s_{12} \cos \omega t + c_3$$

ausgegangen. Schätzwerte für die gesuchten Geschwindigkeitsanteile u_0 und u_1 erhält man nach der Methode des kleinsten Fehlerquadrates aus den Schätzwerten für die Position x_3 .

$$\sum_{j=0}^{2N-1} (x_{3,j}^* - u_0 t_j - s_{11} \sin \omega t_j - s_{12} \cos \omega t_j - c_3)^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

Diese Forderung führt auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2N \cdot c_3^* + \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot u_0^* &= \sum_{j=0}^{2N-1} x_{3,j}^* \\ \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot c_3^* + \sum_{j=0}^{2N-1} t_j^2 \cdot u_0^* + \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot \sin \omega t_j \cdot s_{11}^* + \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot \cos \omega t_j \cdot s_{12}^* &= \sum_{j=0}^{2N-1} x_{3,j}^* \cdot t_j \\ \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot \sin \omega t_j \cdot u_0^* + N \cdot s_{11}^* &= \sum_{j=0}^{2N-1} x_{3,j}^* \cdot \sin \omega t_j \\ \sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot \cos \omega t_j \cdot u_0^* + N \cdot s_{12}^* &= \sum_{j=0}^{2N-1} x_{3,j}^* \cdot \cos \omega t_j \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für dieses Gleichungssystem ist vorausgesetzt worden, daß die Frequenz des Strömungsfeldes ein ganzes Vielfaches der Frequenz des Drehspiegels ist, wie es bei allen Versuchen der Fall ist. Dadurch verschwinden einige Koeffizienten und das Gleichungssystem vereinfacht sich auf das angegebene System.

Die Lösung u_0^* des Gleichungssystem (4.8) stellt einen Schätzwert für die zeitlich mittlere Geschwindigkeit u_0 dar und die Lösungen s_{11}^* und s_{12}^* ergeben nach

$$\omega \sqrt{s_{11}^{*2} + s_{12}^{*2}} = u_1^*$$

den Schätzwert u_1^* für den mit der Frequenz des Strömungsfeldes oszillierenden Geschwindigkeitsanteil u_1 der Kugel.

4.33 Fehlerbetrachtung

Die Ermittlung der Geschwindigkeitsanteile u_0 und u_1 geht von zeitlich aufeinanderfolgenden Wertepaaren der Bildkurve aus. Für die Analyse des Bewegungsverhaltens der Kugel sind nicht die Bildpunkte $(y_2; y_3)$ direkt, sondern der zeitliche Ablauf der tatsächlichen Positionswerte $(x_2; x_3)$ heranzuziehen, so daß die durch den Drehspiegel verursachte Verzerrung der Kugelbahn erst eliminiert werden muß. Für die Entzerrung der Bildkurve wird die Beziehung (4.5) zugrunde gelegt, deren Gültigkeit an bestimmte Voraussetzungen geknüpft ist.

4.33.1 Der Abbildungsfehler des Drehspiegels

Bei Verwendung der verkürzten Gleichung (4.5) gegenüber der allgemein gültigen Beziehung (4.3) muß sichergestellt sein, daß hiermit keine Beeinträchtigung der Versuchsgenauigkeit verbunden ist. Die in den Gleichungen (4.5) vernachlässigten Größen f_2 und f_3 sind periodische Funktionen von der doppelten Frequenz der Drehbewegung des Spiegels. Wegen der Summenorthogonalität von Sinus- und Cosinus-Funktionen zieht eine Vernachlässigung von f_2 keinen Fehler für die Schätzwerte a^* , b^* der Gleichungen (4.7) nach sich. Nur in der zweiten Gleichung des Systems (4.8) entsteht - sofern die Drehzahl des Exzentertriebes nicht gleich der doppelten Spiegeldrehzahl ist - durch die f_3 -Vernachlässigung ein Fehler. Die Amplitude der Größe f_3 beträgt nach Gl. (4.4)

$$2 \sin^2 \psi \sqrt{(x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2}$$

Berücksichtigt man die Daten der Meßanordnung, so wird man auf $|f_3| < 0.5 \text{ mm}$ geführt. Die systematische Verschiebung der Punkte der Bildkurve durch die zweite Harmonische der Abbildungsbeziehung fällt so gering aus, daß sie durch den statistischen Fehler der Werte stark überdeckt wird. Auf Grund der Periodizität von f_3 würde eine Berücksichtigung von f_3 für das Gleichungssystem (4.8) eine Korrektur der zweiten Gleichung von weniger als 0.5 pro mille des Gleichungsbetrages ergeben. Für die vorliegende Untersuchung kann mithin die Entzerrungsgleichung

(4.5) als ausreichend genau angesehen werden.

Den Koordinaten $(y_2; y_3)$ der Bildkurve haften statistische wie auch systematische Fehler an. Die statistischen Fehler treten bei der Übertragung und der Vermaßung der Bildpunkte auf, während ein systematischer Fehler in der Auswertung durch eine geringe Drehzahlabweichung des Drehspiegels bzw. der Maschine vom Sollwert, der der Auswertung zugrunde liegt, hineingeschleust wird. Die Auswirkung der in ihrem Wesen verschiedenen Fehler auf die kinematischen Größen u_0 und u_1 kann abgeschätzt werden, wenn entweder der statistische oder der systematische Fehler dominant ist.

4.33.2 Der statistische Fehler

Überwiegen die zufallsbedingten Fehler, so können mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Vertrauensbereiche für die Schätzwerte der Regression angegeben werden. Unter den Voraussetzungen, daß die zufallsbedingten Fehler in beiden Koordinaten y_2 und y_3 die gleiche Normalverteilung mit der Varianz σ^2 besitzen und statistisch unabhängig voneinander sind [71], erhält man für die Varianz der erwartungstreuen Schätzwerte a^* , b^* für die Abbildungsparameter a , b :

$$\mathcal{H}[a^*] = \mathcal{H}[b^*] = \frac{\sigma^2}{N}$$

a^* und b^* sind statistisch unabhängige Zufallsvariablen. Aus den Regressionsgleichungen (4.8) leitet man für die Varianz der mittleren Sinkgeschwindigkeit u_0

$$\mathcal{H}[u_0^*] = \frac{\sigma^2}{\sum_{j=0}^{2N-1} t_j^2 - \frac{(\sum t_j)^2}{2N} - \frac{(\sum t_j \sin \omega t_j)^2 + (\sum t_j \cos \omega t_j)^2}{N}} + \frac{\sigma^2 \cdot \frac{(\sum t_j \sin \omega t_j)^2 + (\sum t_j \cos \omega t_j)^2}{N}}{\left[\sum_{j=0}^{2N-1} t_j^2 - \frac{(\sum t_j)^2}{2N} - \frac{(\sum t_j \sin \omega t_j)^2 + (\sum t_j \cos \omega t_j)^2}{N} \right]^2}$$

und für die Varianz der Schätzwerte für den oszillierenden Bewegungsanteil

$$\mathcal{H}[s_{u_1}^*] = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{(\sum_{j=0}^{2N-1} t_j \cdot \sin \omega t_j)^2}{N} \cdot \mathcal{H}[u_0^*]$$

$$s^2[u_0^*] = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{(\sum t_i \cdot \cos \omega t_i)^2}{N} \cdot s^2[u_0^*]$$

her. Als Schätzwert für die Varianz σ^2 wird der $1/(2N)$ -te Teil des kleinsten Fehlerquadrates der vertikalen Koordinate benutzt. Sämtliche aus der Regression folgende Schätzwerte sind erwartungstreu und normalverteilt. Der Schätzwert für die Fehlervarianz σ^2 ist nach χ^2 -verteilt mit einem Freiheitsgrad weit über 100. Für hohe Freiheitsgrade geht die Studentverteilung in die Normalverteilung über. Der Vertrauensbereich der Schätzwerte läßt sich nun angeben, falls das kleinste Fehlerquadrat der Auswertung bekannt ist. Wenn der statistische Fehler überwiegt, wird ein kleinstes Fehlerquadrat von kleiner als 2 cm² ermittelt; der Schwellenwert zu 95 % Wahrscheinlichkeit beträgt 1.96

$$|u_0^* - u_0| < 1.96 \sqrt{s^2[u_0^*]} = 1.96 \cdot 0.37 \frac{\text{mm}}{\text{sek}} = 0.726 \text{ mm/sek}$$

$$|s_{11}^* - s_{11}| < 1.96 \sqrt{s^2[s_{11}^*]} = 1.96 \cdot 0.11 \text{ mm} \approx 0.2 \text{ mm}$$

$$|s_{12}^* - s_{12}| < 1.96 \sqrt{s^2[s_{12}^*]} = 1.96 \cdot 0.11 \text{ mm} \approx 0.2 \text{ mm}$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Kugeln beträgt i.a. mehr als 10 cm/sek; u_0 wird mithin genauer als 0.7 % bestimmt. Den Vertrauensbereichen kann entnommen werden, daß die relative Versuchsgenauigkeit für den oszillierenden Bewegungsanteil

$$\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} = s_1^*$$

mit der Amplitude des Strömungsfeldes zunimmt.

4.33.3 Der systematische Fehler

Der Auswertung der Bildkurve wird der Sollwert der Spiegel- bzw. der Exzentertrieb-Drehzahl unterlegt. Wenn die tatsächlichen Drehzahlen von ihren Sollwerten abweichen, werden die Geschwindigkeiten u_0^* und u_1^* einen systematischen Fehler aufweisen. Das Vorliegen einer Drehzahlabweichung läßt sich leicht an einer gleichmäßigen Verschiebung entsprechender Punkte der Bildkurve feststellen. So liegen z.B. für einen

Sollwert der Spiegeldrehzahl von 4 Hz bei einer geringfügigen Abweichung von diesem Wert nicht mehr der 1., 61., 121. usw. Punkt der Bildkurve auf einer Koordinatenlinie $y_2 = \text{konst.}$ Eine merkliche systematische Verschiebung der Bildpunkte tritt schon bei einer Drehzahlabweichung von unter 1 U/min, der Anzeigegenauigkeit der digitalen Drehzahlmessung, auf. Der Einfluß der Drehzahlabweichung auf u_0 und u_1 kann entweder mit dem Programm für die Auswertung der Bildpunkte simuliert werden oder analytisch verfolgt werden. Bei einer geringfügigen Abweichung $\Delta\gamma$ vom Sollwert γ der Kreisfrequenz des Drehspiegels kann für den ausgewerteten Zeitbereich t

$$|\Delta\gamma t| < 0.3; \quad \sin\Delta\gamma t \approx \Delta\gamma t \quad \cos\Delta\gamma t \approx 1$$

angenommen werden. Wird ein überwiegender Einfluß des systematischen Fehlers vorausgesetzt, so können aus den Entzerrungsgleichungen (4.5) und dem Gleichungssystem (4.8) die Gleichungen für den systematischen Fehler der kinematischen Größen u_0 und u_1 hergeleitet werden. Es zeigt sich, daß auch in diesem Fall die Versuchsgenauigkeit für die zeitlich mittlere Geschwindigkeit u_0 besser als 0.8 % ist und daß sich der oszillierende Anteil der Bewegung

$$s_1 = \sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2}$$

mit der Frequenz und der Amplitude des Strömungsfeldes genauer bestimmen läßt. Bei Frequenzen des Strömungsfeldes über 12 Hz kann s_1 eine Genauigkeit von 0.1 mm zugesprochen werden.

4.4 Versuchsergebnisse

Die experimentellen Untersuchungen sind mit geschliffenen Kugeln hoher Sphärizität der Firmen Gebauer & Möller Fulda und Industrial Tectonics Inc. Ann Arbor durchgeführt worden. Die physikalischen Eigenschaften der Kugeln werden in der Tabelle wiedergegeben.

Material	Durchmesser [mm]	Dichte [g/cm ³]	Max. Unrundheit [µm]
Hostaform	2.05	1.43	10
Hostaform	2.55	1.43	10
Hostaform	3.00	1.43	10
Delrin	3.17	1.41	25
Teflon	2.39	2.15	25
Teflon	3.17	2.15	25
Keramik	3.17	3.80	1

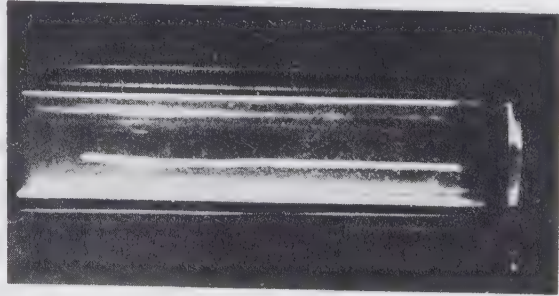
Als Flüssigkeiten sind Wasser und Glyzerin/Wasser-Mischungen verwendet worden.

4.41 Die Bewegungsbahn

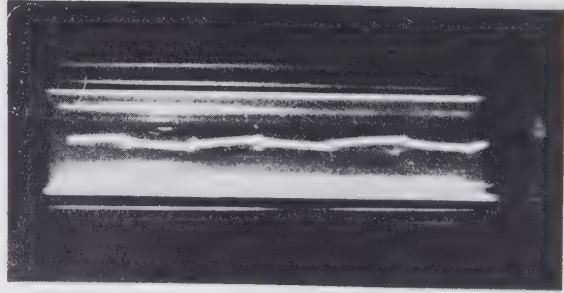
Für eine Kugel, deren Reynoldszahl gebildet mit der stationären Sinkgeschwindigkeit eine ablösende Strömung anzeigt ($Re \geq 300$), werden Bewegungsbahnen beobachtet, wie sie die Fotografien der Abbildung 4.13 zeigen. (siehe S. 64) Die Amplitude beträgt 2 mm; die Frequenz nimmt von 0 Hz, der stationären Kugelumströmung, von links nach rechts zu. Die Fallbewegung in einer ruhenden Flüssigkeit ist keineswegs geradlinig, sondern weist geringfügige durch die periodische Wirbelablösung verursachte Querschwankungen auf. Ein ähnliches Verhalten beobachtete Liebst [50] bei seinen Fallversuchen; er konnte eine strenge Periodizität der Wirbelablösung nicht feststellen. Unter dem oszillierenden Einfluß des Strömungsfeldes führt die sedimentierende Kugel regelmäßige, zur Flüssigkeitsschwingung synchrone, alternierende Querbewegungen um eine mittlere Falllinie aus. Die Frequenz der Wirbelablösung wird durch die Oszillation aufgeprägt.

Viets [85] belegt durch Fotografien über die Beschleunigungsphase von Fallversuchen mit einem speziell präparierten Tennisball, daß die Querbewegung einer Kugel eindeutig mit der

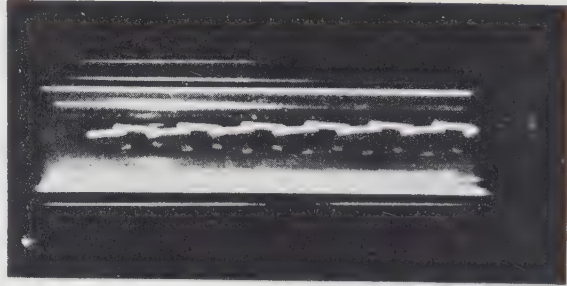
Fallweg einer Kugel im oszillierenden Strömungsfeld
 $d = 2,39 \text{ mm } \phi$; $A = 2 \text{ mm}$



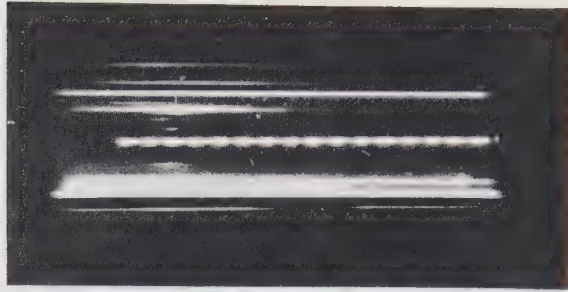
0 Hz



8 Hz



10 Hz



20 Hz

Ablösung eines Wirbelringes an der Kugel verknüpft ist. Während der Beschleunigungsphase bleibt die Symmetrie des Strömungsfeldes erhalten, erst nach Erreichen der stationären Geschwindigkeit wird an einer Stelle der Nachlauf instabil und die Strömung löst ab. Dieser Vorgang bewirkt eine Bewegung der Kugel nach der noch vorläufig stabilen Nachlaufseite, quer zur Sedimentationsbewegung, bis es auch dort zur Ablösung kommt. Die Ablösung des Wirbelringes ist mit einer Verringerung der momentanen Sinkgeschwindigkeit verbunden. Viets verzeichnet für die untersuchte Kugel eine Abnahme der Sinkgeschwindigkeit nach der Ablösung um 27 % gegenüber der Sinkgeschwindigkeit vor der Ablösung. Die Abbildung 4.14 gibt die von Viets nach Fotografien gezeichnete Bewegung der Kugel bei der Ablösung schematisch wieder.

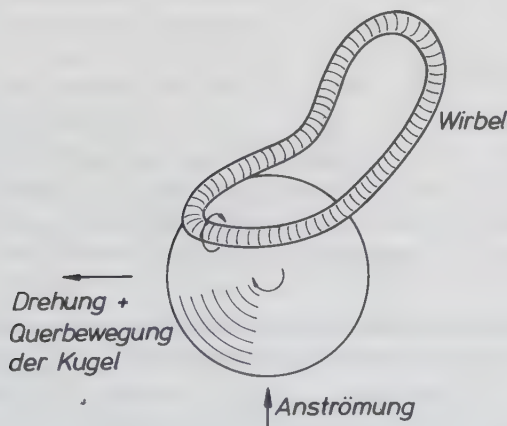


Abb. 4.14: Wirbelablösung an einer Kugel

Der sich an der Kugeloberfläche ablösende Wirbelring leitet eine seitliche Translations- und eine Drehbewegung der Kugel ein.

Mit zunehmender Frequenz des Strömungsfeldes wird die Querbewegung geringer, die Bewegungsbahn der Kugel stabilisiert sich bis schließlich der Fallweg geradlinig verläuft. Nach den

Kenntnissen über die instationäre Kugelumströmung muß eine Wirbelablösung bei hohen Frequenzen ausgeschlossen werden.

Carstens [13] untersuchte die Kraftkomponenten des Widerstandes, die eine geführte, harmonisch in einer Flüssigkeit schwingende Kugel erfährt. Die Strömung blieb bis zu einer Reynoldszahl von 4000, gebildet mit der maximalen Relativgeschwindigkeit, anliegend. Ganz Überraschend ist die Tatsache einer unterdrückten Wirbelablösung jedoch nicht. Die Ausbildung des Nachlaufes und die Ablösung der Wirbel benötigt eine gewisse Zeit. Durch die Oszillation des Strömungsfeldes wird die Wirbelablösung synchronisiert. Mit zunehmender Frequenz reicht die Zeit zur Ausbildung eines Wirbelsystems nicht mehr; die Nachlaufströmung bleibt symmetrisch.

4.42 Der Abbremsseffekt

Zur Kontrolle der Systemparameter wurde zu jeder Versuchsreihe die Sinkgeschwindigkeit der Kugel in dem unbewegten Zylindergefäß bestimmt. Die Sinkgeschwindigkeit eines in einem Gefäß sedimentierenden Körpers ist wegen des Wandeinflusses etwas geringer als in einem unbegrenzten Medium.

Nach Messungen von Fidleris und Whitmore [22] ist der Wand-einfluß für die schleichende Umströmung bedeutend größer als für die ablösende Umströmung. Für ein Durchmesser-Verhältnis $d/D < 0.1$, wie es bei allen Versuchen vorliegt, ist ab einer Reynoldszahl von $Re_{\text{ruh}} \approx 30$ der Wandeinfluß auf die Sinkgeschwindigkeit kleiner als 1 % und kann mithin vernachlässigt werden. Für instationäre Strömungsverhältnisse liegen keine ausreichenden Versuchsergebnisse über den Wandeinfluß auf die momentane Sinkgeschwindigkeit vor. Carstens [13] konnte für die zwischen zwei Federn in einer Flüssigkeit schwingende Kugel für ein Durchmesser-Verhältnis $d/D < 0.1$ keinen Wandeffekt mehr feststellen. Für die Sedimentationsbewegung eines kugelförmigen Teilchens im zeitlich veränderlichen Strömungsfeld kann erwartet werden, daß der Wandeinfluß für Durchmesser-Verhältnisse kleiner als 0.1 von unter-

geordneter Bedeutung für die Kugelgeschwindigkeit ist, sofern die Reynoldszahl der Kugelumströmung größer als 30 ist.

Die experimentell bestimmten Werte der Sinkgeschwindigkeit w_f weisen eine Reproduzierbarkeit von 1 % auf und schwanken um weniger als 3% um den Wert, der nach der Bewegungsgleichung (2.16) für die stationäre Sedimentationsbewegung ($A = \omega = 0$) unter Verwendung der Approximationsformel (3.43) theoretisch berechnet wird. Da die benutzte Approximation selbst einen relativen Fehler von ± 4 % zu den tatsächlichen Werten des Widerstandsbeiwertes aufweist, sind die bestimmten Werte als hinreichend genau anzusehen.

Die Diagramme, Abb. 9.1 bis 9.17, geben für die jeweils untersuchte Kugel den Abbremsseffekt als Funktion der Frequenz bei konstanter Amplitude wieder. Die Kreise entsprechen dem experimentell bestimmten Abbremsseffekt. Die Kurven sind numerisch berechnete Lösungen der Bewegungsgleichung (2.18) für folgende Modelle:

- Kurve a: Der instationäre Strömungswiderstand wird als quasistationär unter Einschluß der scheinbaren Masse mit einem Koeffizienten $c_a = 0.5$ vorausgesetzt. Das aus dieser Bewegungsgleichung resultierende Bewegungsverhalten wird als quasistationär bezeichnet.
- Kurve b: Der instationäre Strömungswiderstand enthält zusätzlich den Basset-Term der Schleichströmung; $c_H = 6$.
- Kurve c: Die Wechselwirkung zwischen der Kugel und der Flüssigkeit wird nach der von Odar[58] angegebenen Formel in Rechnung gesetzt, d.h. der quasistationäre Widerstandsbeiwert wird um die scheinbare Masse und um den Basset-Term erweitert, deren Koeffizienten nicht mehr konstant sind:

$$c_a = 1.05 - \frac{0.066}{Ac^2 + 0.12}$$

$$c_H = 2.88 + \frac{3.12}{(Ac + 1)^3}$$

Im allgemeinen nimmt der Abbremsseffekt von Modell a zu c höhere Werte an; im Bereich niedriger Frequenzen sind die Unterschiede in den Aussagen der Modelle gering. Auffallend ist, daß der experimentelle Abbremsseffekt von Kugeln, deren mit der Sinkgeschwindigkeit gebildete Reynoldszahl einen mit Wirbelablösung verbundenen Strömungszustand anzeigt ($Re_{ruh} \gtrsim 270$), einen Einbruch von über 20 % aufweist. Liegt keine Wirbelablösung an der Kugel vor, dann fehlt auch die charakteristische Einbuchtung des experimentellen Abbremsseffektes. Das von allen Modellen abweichende Verhalten ist eine typische Wechselwirkung von schwingender Kugel und Kugelnachlauf bei ablösender Umströmung.

4.42.1 Das System Kugel-Kugelnachlauf als selbsterregungsfähiger Schwinger

Im Abschnitt 2.11 wird darauf hingewiesen, daß im Nachlauf der stationären Kugelumströmung periodische Pulsationen und ab einer Reynoldszahl von 270 bis 300 Wirbelablösungen an der Kugel beobachtet werden. Die rhythmische Nachlaufbewegung wird durch die Strouhalzahl beschrieben, die eine Funktion der Reynoldszahl ist und für die Goldburg und Florsheim die Beziehung (2.8) angeben. Über die Konfiguration des Kugelnachlaufs ist im Vergleich zum Zylindernachlauf sehr wenig bekannt. Es wird deshalb auf die Erscheinungen des Zylindernachlaufs eingegangen.

Die ablösende Strömung an einem Zylinder führt im Nachlauf zur Anordnung zweier paralleler Wirbelreihen. Von Karman [82] zeigte, daß nur eine bestimmte geometrische Anordnung der Wirbel in der "Wirbelstraße" stabil ist und berechnete den Widerstand des Zylinders aus dem Energiehaushalt der Wirbelstraße. In seinem Ergebnis geht die Geometrie der Wirbelstraße ein. Die Verknüpfung der Abmessung der Wirbelstraße mit der des angeströmten Körpers ist bis heute noch nicht gelungen, so daß die Bedeutung der von Karman'schen Rechnung darin besteht, einen Widerstand von Körpern als Folge der Wirbelerzeugung aufgedeckt zu haben. In einer experimentellen Untersuchung zusammen mit Rubach konnte von Karman aus den kinematischen Daten des Wirbelsystems den Wider-

stand des Zylinders in Übereinstimmung mit dem Versuch berechnen. Die theoretische Arbeit von Karman's löste in der Folgezeit viele Untersuchungen über den Nachlauf von symmetrischen Körpern, vorzugsweise des Zylinders, aus, die empirischer Natur sind.

Der Nachlauf einer Kugel wirkt mit periodischen Kräften senkrecht wie parallel zur Strömung auf die Kugel zurück. Das System Kugel-Kugelnachlauf kann Schwingungen ausführen, die durch den Nachlauf erzeugenden Körper selbst verursacht werden. Liebst [50] verzeichnete in seinen Fallversuchen mit Kugeln keinen stationären Strömungszustand, sondern stellte eine um den Mittelwert schwankende Sinkgeschwindigkeit fest. Der zeitlich mittlere Wert der Sinkgeschwindigkeit wird zur experimentellen Bestimmung des stationären Widerstandsbeiwertes herangezogen. Ein von der quasistationären Beschreibung abweichendes Verhalten der Kugelbewegung ist dann zu erwarten, wenn die durch Reibung verursachten Verluste der Schwingung durch eine Energiezufuhr im Takt der natürlichen Frequenz - oder in deren Nähe - des zu selbsterregungsfähigen Schwingungen neigenden Systems von Kugel und Kugelnachlauf ausgeglichen werden. Eine im Strömungsfeld schwingende Kugel kann Phänomene aufweisen, die einem selbsterrungsfähigen Schwinger unter einer erzwungenen Schwingung ähnlich sind.

Um auf die Bedeutung selbsterregter aerodynamischer Systeme hinzuweisen, seien zwei Beispiele genannt. Das Flattern von Flugzeugflügeln ist eine Folge der Wechselwirkung von instationären Luftkräften im Flügelnachlauf mit dem schwingungsfähigen Tragflügel [51]. Den Einsturz der Tacoma-Brücke in den USA konnte von Karman [83] durch die bei Sturm am Brückengeländer erzeugten Wirbel erklären, die zu einer periodischen Belastung in der Nähe der Eigenfrequenz der Brücke führten. Die Energie zur Einleitung und Aufrechterhaltung der Schwingung wird in beiden Fällen dem Luftstrom entnommen.

Für den kugelförmigen Körper äußert sich die zur selbsterregten Schwingung benötigte Energie in einem erhöhten Strömungswiderstand. Ein gegenüber dem quasistationären erhöhter Widerstand führt zu einer zeitlich mittleren geringeren

Sinkgeschwindigkeit der Kugel im oszillierenden Strömungsfeld. Voraussetzung für das Phänomen der selbsterregten Schwingung ist, daß die Frequenz der erzwungenen Kugelschwingung in der Nähe der natürlichen Frequenz der Nachlaupulsationen liegt, d.h. der Ablösefrequenz der Wirbel.

Selbsterregte Schwingungen sind von Berger [6] und Sedrak [70] auch an einem normal zur Strömung schwingenden Zylinder festgestellt worden. Ihre Widerstandsmessungen, die sich in erster Linie auf den Synchronisationsbereich der erzwungenen, selbsterregten Schwingung konzentrieren, zeigen in der Nähe der natürlichen Frequenz des Zylinder-Nachlauf-System eine Widerstandszunahme bis zu 30 %.

4.4.2.2 Das Verhalten für Frequenzen weit unterhalb der natürlichen Frequenz

Die Versuche von Ho, die in vorzüglicher Übereinstimmung mit der Aussage der quasistationären Bewegungsgleichung für die ablösende Umströmung stehen, erscheinen nun in einem neuen Licht. Die Versuchskugeln Ho's bestehen aus Material hoher Dichte; der Durchmesser liegt trotz hoher Reynoldszahlen bzw. großer Sinkgeschwindigkeit w_f bei kleinen Werten. Die Frequenz des Strömungsfeldes ist niedrig, so daß in den Versuchen mit ausgezeichneter Übereinstimmung

$$\frac{f \cdot d}{w_f} < 0.02$$

beträgt. Die Strouhal-Zahl als äquivalente Größe für die Eigenfrequenz des Kugel-Nachlauf-Systems liegt zwischen 0.3 und 0.4. Das selbsterregungsfähige System wird wegen der großen Verstimmung $f < 0.1 f_{abl}$ zwischen angelegter und natürlicher Frequenz nicht angeregt. Während einer Schwingungsdauer des Strömungsfeldes finden über 10 Wirbelablösungen statt, die wiederum eine Voraussetzung für die Gültigkeit des quasistationären Widerstandes bilden.

Die Versuche von Molinier e.a. erlauben den gleichen Schluß.

Bei kontinuierlicher Vergrößerung der Frequenz knicken die experimentellen Abbremsseffekte zu geringeren Werten ab. Wie der Abbildung 4.4 zu entnehmen ist, stimmt der Abbremsseffekt nach dem quasistationären Modell mit den Versuchen bis zu einem Schwellenwert der dimensionslosen Gruppe

$$\frac{f \cdot d}{w_f} = \frac{150 \cdot 0.317}{60 \cdot 37.7} = 0.021$$

überein.

Nach den vorliegenden Versuchsergebnissen ist eine quasistationäre Beschreibung des Abbremsseffektes für kugelförmige Partikel, deren Umströmung mit Wirbelablösung verbunden ist, dann zutreffend, wenn die mit der Frequenz des Strömungsfeldes gebildete Größe $f \cdot d / w_f$ den Wert 0.02 nicht überschreitet. Nach höheren Frequenzen hin beginnt eine Wechselwirkung von schwingender Kugel und der periodischen Komponente des Nachlaufs.

4.4.2.3 Das Verhalten in der Nähe der natürlichen Frequenz-Synchronisationsbereich

Stimmt die Frequenz des Strömungsfeldes mit der Frequenz der Wirbelablösung überein, dann kommt es bei der Kugelumströmung zu selbsterregten Schwingungsphänomenen. Der Abbremsseffekt läßt sich in keiner Weise durch eine quasistationäre Bewegungsgleichung beschreiben. Die gemessenen Abbremsseffekte (siehe z.B. die Diagramme 9.1 bis 9.9, 9.11 bis 9.14) weisen eine charakteristische Abnahme auf. Stellvertretend wird der Abbremsseffekt für eine 2.55 mm große Kugel (Abb.: 9.2) mit einer Sinkgeschwindigkeit von 14.8 cm/sek, entsprechend einer Reynoldszahl von 380, erörtert. Nach Gl. (2.8) kann die Frequenz der Wirbelablösung zu 6.4 Hz berechnet werden. Bei einer Frequenz des Strömungsfeldes um 6 Hz weist der Abbremsseffekt die stärkste Abnahme (ca. 20 %) gegenüber den berechneten Werten der Modelle a bis c auf. Nach höheren wie nach niedrigeren Frequenzen nähert sich der Abbremsseffekt wieder den berechneten Werten. Bei etwa 14 Hz, ungefähr der doppelten Wirbelablösefrequenz, stimmt der Abbremsseffekt mit dem nach Modell b berechneten Wert überein.

Eine Übereinstimmung mit der quasistationären Bewegungsgleichung ist erst für Frequenzen unter $0.02 \omega_f/d = 1.16 \text{ Hz}$ zu erwarten.

An dieser Stelle sei noch auf das Diagramm 9.13 eingegangen. Die Wirbelablösefrequenz beträgt 36 Hz. So ist es verständlich, daß im gesamten untersuchten Frequenzbereich $4 \text{ Hz} < f < 25 \text{ Hz}$ ein deutlich geringerer Abbremsseffekt gemessen wird; denn eine quasistationäre Beschreibung wird erst für Frequenzen unter 2.85 Hz zutreffen.

Die Versuche von Baird e.a. liegen überwiegend in dem Synchronisationsbereich und zeichnen sich mithin durch einen stärkeren Abbremsseffekt als zu erwarten wäre aus. Ebenso kann der in Abbildung 4.3 dargestellten Versuchsreihe von Ho ein Wert von $f \cdot d/\omega_f = 0.04$ zugeordnet werden, der eine wechselseitige Beeinflussung zwischen der pulsierenden Nachlaufströmung und der schwingenden Kugel anzeigt. Die gemessenen Abbremsseffekte liegen um 30 % unter den erwarteten Werten.

Liegt eine hinreichend hohe Reynoldszahl Re_{ruh} für die stationäre Kugelumströmung vor, so daß Ablösung von Wirbeln auftritt, dann nehmen die Abbremsseffekte für Frequenzen in der Nähe der Wirbelablösefrequenz bedeutend geringere Werte an. Optisch kann dieser Synchronisationsbereich an dem mit pendelnden Querbewegungen überlagerten Fallweg der Kugel erkannt werden. Siehe hierzu die Abbildung 4.13, Seite 64.

4.42.4 Das Verhalten für Frequenzen über den Synchronisationsbereich hinaus

Für hinreichend hohe Frequenzen des Strömungsfeldes wird die Wirbelablösung an der Kugel unterdrückt. Kennzeichnend hierfür ist die geradlinige Sedimentationsbewegung der Kugel.

Da nach der von Karmanschen Vorstellung die Wirbelbildung im Nachlauf in einen Körperwiderstand umgerechnet werden kann, muß für höhere Frequenzen des Strömungsfeldes mit einem gegenüber dem quasistationären Widerstand geringeren instationären Widerstand gerechnet werden. Die Nachlaufwirbel vergrößern den

Druckwiderstand des Körpers. Andererseits ist der Druckwiderstand mit einem quadratischen Widerstandsgesetz verbunden. Eine Unterdrückung der Wirbel Ausbildung verringert somit die Nichtlinearität des Strömungswiderstandes. Der Abbremsseffekt als ein nichtlineares Phänomen nimmt Werte an, die in Richtung Wert 1, der für ein lineares Widerstandsgesetz gilt, verschoben sind. Diese Tendenz wird durch eine Bewegungsgleichung, die den Basset-Term miteinschließt erfaßt, wobei die von Odar und Hamilton angegebene Formel für den instationären Widerstand (Modell c) den Abbremsseffekt für höhere Frequenzen genauer beschreibt als ein nur um die Terme der zähen Umströmung erweiterter Widerstand (Modell b). Z.B. entnimmt man dem Diagramm 9.4, daß der gemessene Abbremsseffekt für $f > 10$ Hz gut mit dem nach Modell c erwarteten Wert übereinstimmt. Die Abweichungen zu den Werten der quasistationären Bewegungsgleichung (Modell a) betragen 15 %.

Im Synchronisationsbereich nehmen die Abbremsseffekte bedeutend geringere Werte an, für Frequenzen über den Synchronisationsbereich hinaus nehmen die gemessenen Abbremsseffekte wegen der verhinderten Wirbelablösung höhere Werte an, als nach der quasistationären Bewegungsgleichung zu erwarten wäre. Nur für eine bestimmte Frequenz wird die Aussage der quasistationären Bewegungsgleichung hinsichtlich des Abbremsseffektes durch den Versuch bestätigt. Die gemessenen Abbremsseffekte streben für höhere Frequenzen über den Synchronisationsbereich hinaus der Kurve zu, die nach der Bewegungsgleichung mit dem von Odar angegebenen Widerstand berechnet wird.

Synchronisation zwischen den Frequenzen der Wirbelablösung und des Strömungsfeldes ist an die Existenz von rhythmischen Pulsationen in der Nachlaufströmung gebunden. Eine periodische Komponente ist im Nachlauf erst für Reynoldszahlen über 130 zu verzeichnen. Bei kleinen Reynoldszahlen entfällt der Synchronisationsbereich im Verhalten eines kugelförmigen Teilchens im harmonisch oszillierenden Strömungsfeld und damit auch der charakteristische Einbruch in den Werten des Abbremsseffektes. Auch in diesem Fall wird man von Frequenzen oberhalb

der natürlichen Frequenz (Wert Null) sprechen. Im gesamten untersuchten Frequenzbereich sedimentiert die Kugel geradlinig.

Die gemessenen Abbremsseffekte stimmen mit den Werten der Bewegungsgleichung, die den Widerstand nach Odar e.a. enthält, am besten überein. (siehe Diagramme 9.10, 9.15 bis 9.17) Mit zunehmender Schwingungsintensität nehmen die gemessenen Abbremsseffekte etwas höhere Werte an. Es ist nicht unverständlich, daß die Versuchsergebnisse mit den Aussagen des Modells c - Widerstand nach Odar - besser übereinstimmen als mit den Aussagen des Modells b, das den Basset-Term und die scheinbare Masse der zähen Umströmung einschließt; denn der Widerstand nach Odar wurde aus Versuchsergebnissen, die den Reynoldszahl-Bereich bis 62 erfassten, gewonnen. Dagegen ist die schleichende Umströmung auf Reynoldszahlen kleiner als eins beschränkt. Die vorliegenden Versuche erstrecken sich aber auf Reynoldszahlen über den von Odar untersuchten Bereich hinaus. Ein quasistationäres Widerstandsgesetz liefert einen bedeutend stärker ausgeprägten Abbremsseffekt und muß daher für den Umströmungszustand, dessen Symmetrie wegen unterdrückter Wirbelablösung erhalten bleibt, als nicht zutreffend bezeichnet werden.

4.43 Das Amplitudenverhältnis

Für das Amplitudenverhältnis von Partikelschwingung und der Schwingung des Strömungsfeldes

$$\frac{u_1}{A \omega} = \frac{s_1}{A}$$

wird sowohl für die Schleichströmung als auch für die ablösende Umströmung ein Wert kleiner als eins erwartet, sofern die Dichte des Kugelmateri als größer als die der Flüssigkeit ist. Auf die Bedeutung dieses Verhältnisses als Quotient der Energiespektren von Feststoffteilchen und Flüssigkeit für die Dispersion des Feststoffes in einer turbulent strömenden

Flüssigkeit haben Hjelmfeldt und Mockros [29] hingewiesen. In ihrer theoretischen Arbeit, deren Ausgangspunkt die Bewegungsgleichung für die zähe Umströmung der Kugel ist, kommen sie zu der Feststellung, daß für das Bewegungsverhalten von Feststoffpartikeln in einem Turbulenzfeld keine Vereinfachung der Bewegungsgleichung, wie z.B. die Vernachlässigung des Basset-Terms, zulässig ist.

In der vorliegenden Untersuchung, die sich auf höhere Reynoldszahlen erstreckt, sind die Amplitudenverhältnisse nach den Modellen a, b, c (siehe Abschnitt 4.42) berechnet worden. Auffallend ist, daß die Unterschiede in den Aussagen der Modelle b und c, deren Bewegungsgleichung den Basset-Term enthält, in dem überwiegenden Teil der Versuchsreihen gering sind; beide sich aber von der für die quasistationäre Bewegungsgleichung geltenden Aussage (Modell a) abheben.

In den Diagrammen 9.18 bis 9.31 ist das Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz aufgetragen. Die Amplitude A der Zylinderschwingung ist mit einer Meßuhr auf 1/100 mm ausgemessen, die Amplitude s_1 der Kugelbewegung mittels Rechenprogramm aus den fotografierten Bildkurven bestimmt worden. Generell lassen sich die gemessenen Amplitudenverhältnisse durch eine Bewegungsgleichung, die den Basset-Term miteinschließt, genauer beschreiben als nach einer quasistationären Bewegungsgleichung. Für Flüssigkeiten höherer Viskosität hebt sich das Amplitudenverhältnis nach Modell b von dem des Modells c stärker ab. In diesen Fällen (siehe Diagramm 9.18) decken sich die Versuchswerte mit dem Amplitudenverhältnis nach einer Bewegungsgleichung mit dem Widerstandsgesetz von Odar (Modell c). Dem von Odar angegebenen instationären Widerstand wird man deshalb den Vorzug geben müssen.

5. Ausblick auf die feststoffbeladene Strömung

Die Dispersion von Feststoff in einem Trägermedium ist von grundlegendem Interesse z.B. für die hydraulische und pneumatische Förderung in Rohren, dem Sedimenttransport in Kanälen, für den Grad der Luftverschmutzung durch industrielle Rauchgase sowie für die Sichtbarmachung von Strömungen mit Tracerteilchen. Eine Beschreibung dieser Transportprozesse geht für geringe Feststoffkonzentrationen von dem Verhalten diskreter Partikel in einer turbulent strömenden Flüssigkeit aus. Batchelor [4, 27 S. 311] kommt auf Grund einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung über die eindimensionale Zufallsbewegung der Partikel zu dem Ergebnis, daß für die mittlere Konzentration

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon_p \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

$$\text{mit} \quad \epsilon_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\overline{X^2(t)}) \quad (5.2)$$

gilt, wenn der als Zufallsvariable aufzufassende Verschiebungsweg $X(t)$ der Partikel eine Gauß-Verteilung zugeordnet werden kann. Da das Verschiebungsquadrat nicht unbedingt eine lineare Funktion der Zeit sein muß, ist der Dispersionskoeffizient im allgemeinen von der Zeit abhängig.

Die Verallgemeinerung auf die dreidimensionale Dispersion, die in Wirklichkeit bei physikalischen Vorgängen vorliegt, ist auch von Batchelor angegeben worden. Hinze [27] bemerkt hierzu, daß die Gleichungen für die dreidimensionale Dispersion nur von theoretischem Interesse sind, da die zur Berechnung benötigten Langrangeschen Korrelations-Tensorfunktionen weder experimentell noch theoretisch bekannt sind. Zudem reiche die Gleichung der eindimensionalen Dispersion aus, um experimentelle Ergebnisse zu beschreiben.

Für die Feststoffausbreitung in strömenden Medien ist die Gleichung (5.1) um den Term des konvektiven Transportes zu erweitern. Für den stationären Zustand des turbulenten Feststofftransportes erhält man

$$\bar{u} \frac{\partial c}{\partial x} = \epsilon_p \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

mit $\bar{u}$ der mittleren Partikelgeschwindigkeit in der turbulent strömenden Flüssigkeit.

Für den schwebenden Transport der hydraulischen Förderung wie für den Sedimenttransport ist die Kenntnis der Feststoffverteilung über den Querschnitt von Interesse. Sind die den Transport bestimmenden physikalischen Größen, die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit und der turbulente Dispersionskoeffizient ϵ_p bekannt, kann nach Gleichung (5.3) das Konzentrationsprofil berechnet werden.

Eine Möglichkeit theoretisch die auf den Feststoff bezogenen Größen $\bar{u}$ und ϵ_p zu bestimmen, besteht in der Verknüpfung dieser Größen mit den charakteristischen Turbulenzgrößen der Trägerströmung, die als bekannt vorausgesetzt werden, mittels der Bewegungsgleichung der Partikel. Der Anwendung der Bewegungsgleichung (2.16) zur Berechnung der stochastischen Kennwerte liegt folgende Modellvorstellung der turbulenten Strömung zugrunde.

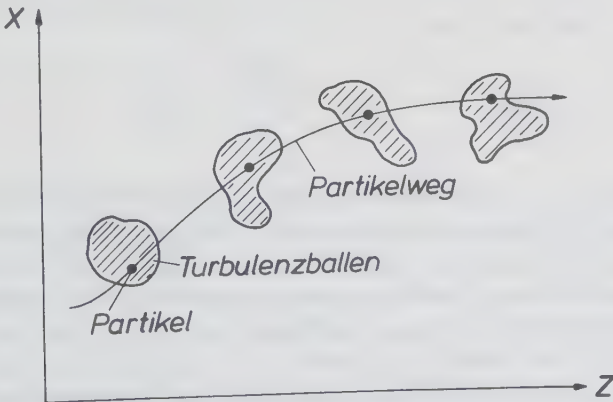


Abb. 5.1: Bewegung einer Partikel mit dem Turbulenzballen

Die Feststoffteilchen sind in Turbulenzballen eingebettet. Die Turbulenzballen werden als ein homogenes Flüssigkeitsgebiet mit einer einheitlichen Geschwindigkeit, der Zufallscharakter zugesprochen werden muß, betrachtet. Die Voraussetzungen der Rechnung leiten sich aus dem Modell selbst her und können z.B. Bei Hinze [27] oder Soo [72] nachgelesen werden. Die uneingeschränkte Anwendung der Bewegungsgleichung setzt ein Verweilen der Partikel im gleichen Turbulenzballen voraus. Eine Annahme, die kaum in einem realen Turbulenzfeld zutrifft. Partikel, die einem merklichen Schwerkrafteinfluß unterliegen, verweilen nur eine begrenzte Zeit in einem Turbulenzballen und wechseln dann zu einem anderen Ballen hinüber. Die Bewegungsgleichung ist nur für die Verweilzeit der Partikel in einem Turbulenzballen zutreffend und auch dann nur unter einer weiteren Einschränkung. Der Druckgradient im Turbulenzballen wird durch die instationäre, turbulente Bewegung des Trägermediums aufgeprägt. Corrsin und Lumley [15] korrigierten die Bewegungsgleichung für die in einem Turbulenzballen eingelagerten Partikel, indem sie den dynamischen Auftrieb aus den Navier-Stokes-Gleichungen für die feststofffreie Flüssigkeit in diese Gleichung einführten. Wie Hinze [27] ausführt, kann die Korrektur für

$$\frac{d}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{u}{v} \cdot \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \gg 1 \quad (5.4)$$

vernachlässigt werden. Wegen der mit der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen verbundenen Schwierigkeiten, werden in theoretischen Abhandlungen [27,14,23,46,73,77] über die Dispersion von Partikeln diese Ungleichungen als gültig vorausgesetzt.

Die für die Anwendbarkeit der Bewegungsgleichung von Partikeln in einer turbulent strömenden Flüssigkeit zu fordernden Annahmen sind im allgemeinen für feine Partikel, deren Umströmung durchaus mit Reynoldszahlen >1 verbunden sein kann, zutreffend. Für ein lineares Widerstandsgesetz, das nur für Reynoldszahlen

kleiner als eins gültig ist, ist nach dieser Bewegungsgleichung die turbulente Diffusion von mehreren Autoren untersucht worden. Die bemerkenswertesten Arbeiten gehen auf Tchen [77] , Friedländer [23] , Soo [73] , Liu [46] , Hinze [27] und Chao [14] zurück. Wegen der Linearität der Bewegungsgleichung, kann die Sinkgeschwindigkeit eliminiert und die Betrachtung allein auf die Schwankungsgrößen reduziert werden. Die einzige stochastische Kenngröße des Transportprozesses ist somit die Partikeldispersion; denn die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit wird durch die Turbulenz der Strömung nicht beeinflusst. Das mittlere Verschiebungsquadrat und die Dispersion ϵ_p der Partikel wird von Tchen und Friedländer im Zeitbereich berechnet, von Soo, Hinze , Liu und Chao im Frequenzbereich, wobei sie die Verbindung zum Zeitbereich durch eine Fourier-Transformation herstellen.

Die Arbeiten der genannten Autoren unterscheiden sich weniger in ihren Ergebnissen als vielmehr in der gewählten Berechnungsmethode. Um eine Querverbindung zu dem Verhalten einer Kugel in einem oszillierenden Strömungsfeld zu ziehen, wird auf die Berechnung der Partikeldispersion eingegangen. Die Vorgehensweise lehnt sich an jene von Chao an.

Die mittlere Partikelgeschwindigkeit wird zu

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (5.5)$$

definiert, so daß die Schwankungsgeschwindigkeit

$$u'(t) = u(t) - \bar{u} \quad (5.6)$$

beträgt. Eine Voraussetzung zur Berechnung des Verschiebungsquadrates ist die Homogenität des Turbulenzfeldes, d.h. die Eigenschaften des Strömungsfeldes ändern sich nicht von Punkt zu Punkt. G.I. Taylor [76] leitete für das mittlere Verschiebungsquadrat als Folge der Schwankungsgeschwindigkeit u'

$$\overline{x^2(\tau)} = 2 \bar{u}^2 \int_0^\tau dt \int_0^\tau R_p(\tau) d\tau \quad (5.7)$$

$$\text{mit} \quad R_p(\tau) = \frac{u'(t) u'(t+\tau)}{u'^2} \quad (5.8)$$

her. In der Literatur findet sich häufig eine zu Gl. (5.7) äquivalente Gleichung, die auf Kampe de Fariet zurückgeht.

$$\overline{X^2(t)} = 2 \overline{u'^2} \int_0^t (t - \tau) \cdot R_p(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

Nach Gleichung (5.2) erhält man den Dispersionskoeffizienten durch Differenzieren nach der Zeit t

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{X^2(t)}) = \overline{u'^2} \int_0^t R_p(\tau) d\tau \quad (5.10)$$

Die Beschreibung im Frequenzbereich geht von der Fourier-transformierten für einen ausgeblendeten Zeitabschnitt $-T < t < T$ der Partikelschwankungsgeschwindigkeit u' aus.

$$\tilde{u}_T(\omega) = \int_{-T}^T u'(t) \cdot \exp(-i\omega t) dt \quad (5.11)$$

Die spektrale Leistungsdichte $E_p(\omega)$ von u' wird zu

$$\overline{u'^2} \cdot E_p(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}_T \cdot \tilde{u}_T^*}{2 \pi T} \quad (5.12)$$

definiert.

Die Partikelschwankungsgeschwindigkeit u' ist mit der Flüssigkeitgeschwindigkeit v im Zeitbereich durch die Bewegungsgleichung verknüpft. Im Frequenzbereich entspricht dieser Beziehung

$$\tilde{u}(\omega) = F(i\omega) \tilde{v}(\omega)$$

Der Frequenzgang $F(i\omega)$ hält die Eigenschaften der nach der absoluten Partikelgeschwindigkeit aufgelösten Bewegungsgleichung fest. Mit einer zur spektralen Leistungsdichte der Partikelschwankungsgeschwindigkeit analogen Definition E für die Schwankungsgeschwindigkeit des Turbulenzballens $v(t)$, erhält man

für das Verhältnis der Leistungsdichten

$$\frac{E_p(\omega)}{E(\omega)} = \frac{\overline{v^2}}{u'^2} |F(i\omega)|^2 \quad (5.13)$$

Zwischen der Autokorrelation nach Gl. (5.8) und der spektralen Leistungsdichte besteht die Wiener-Khintchin-Relation

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \int_0^\infty E(\omega) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\omega \\ E(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\tau) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\tau \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Partikeldispersion berechnet sich somit nach Gl. (5.10) und Gl. (5.14) zu

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \overline{u'^2} \int_0^t R_p(\tau) d\tau = \overline{u'^2} \int_0^t d\tau \int_0^\infty E_p(\omega) \cdot \cos \omega \tau \cdot d\omega \\ \epsilon_p &= \overline{u'^2} \int_0^\infty E_p(\omega) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega} \cdot d\omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wird nach Gl. (5.13) die spektrale Leistungsdichte der Partikelschwankungsgeschwindigkeit auf die der Trägerflüssigkeit zurückgeführt, so erhält man

$$\epsilon_p = \overline{v^2} \int_0^\infty \frac{\sin \omega \tau}{\omega} |F(i\omega)|^2 \cdot E(\omega) \cdot d\omega \quad (5.16)$$

Diese Gleichung besagt, daß bei Kenntnis der Turbulenzgrößen $\overline{v^2}$ und $E(\omega)$ des Strömungsmediums, die Dispersion der Partikel dann berechnet werden kann, wenn der Betrag des Frequenzganges, der eine Eigenschaft der Bewegungsgleichung widerspiegelt, bekannt ist. Der Frequenzgangbetrag stellt aber das Amplitudenverhältnis von Partikel- zur Flüssigkeitsschwingung dar.

Für die Umströmung der Partikel bei höheren Reynoldszahlen muß in der Bewegungsgleichung ein nichtlineares Widerstandsgesetz in Rechnung gesetzt werden. Eine quasilineare Beschreibung des turbulenten Feststofftransportes geht von der Verteilung der turbulenten Schwankungsgrößen aus. Einige experimentelle

Ergebnisse, die auf Batchelor und Townsend[5] zurückgehen, zeigen, daß in einem homogenen Turbulenzfeld die Schwankungsgeschwindigkeit v annähernd eine Gauß-Verteilung besitzt. Eine auf das Minimum des quadratischen Fehlers aufbauende quasi-lineare Beschreibung der nichtlinearen Bewegungsgleichung für normalverteilte Schwankungsgeschwindigkeiten führt zu einer Gleichung (5.16) ähnlichen Aussage; in dieser Gleichung ist der Frequenzgang $F(i\omega)$ durch eine Funktion $K(i\omega, \sigma_u)$ zu ersetzen, die gewissermaßen den Frequenzgang der linearen Ersatz-Bewegungsgleichung für gaußverteilte Signale darstellt. σ_u bedeutet die Varianz der Partikelschwankungsgeschwindigkeit, die mit dem RMS-Wert $\sqrt{u'^2}$ übereinstimmt.

Aus der Systemtheorie ist bekannt, daß der Verteilungstyp von gaußverteilten Signalen (Schwankungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit) durch ein lineares System (Bewegungsgleichung) nicht verformt wird. Im Bereich deterministischer Signale trifft dies nur für sinusförmige Signale zu. Eine quasi-lineare Beschreibung von nichtlinearen Systemen nach dem gleichen Fehlerkriterium führt für ein sinusförmiges Signal mit der Amplitude x_0 zu einer Art Ersatzfrequenzgang $N(x_0)$ und für gaußverteilte Signale zu $K(\sigma_u)$. Der mathematische Aufbau der Funktionen N bzw. K kann sehr verschieden sein; häufig weisen sie dennoch einen ähnlichen Verlauf über x_0 bzw. σ_u auf [68].

Wenn sich die gemessenen Amplitudenverhältnisse von Partikel und Strömungsfeld für ein dem oszillierenden Strömungsfeld frei überlassenes kugelförmiges Feststoffteilchen nach einer Bewegungsgleichung, die den Strömungswiderstand nach Odar einbezieht, beschreiben lassen, so ist dies zwar noch kein Beweis für die Gültigkeit dieser Gleichung für eine stochastische Bewegung des Turbulenzballen. Aber für die den "Odar-Widerstand" einschließende Bewegungsgleichung zur Berechnung der Feststoffdispersion spricht mehr als für andere Modelle; zumal das Amplitudenverhältnis in einer gewissen Verwandtschaft zur Kennfunktion $|K|$ steht, die nach Gleichung (5.15) zur Bestimmung der Dispersion benötigt wird.

Eine nichtlineare Bewegungsgleichung wirkt sich für die Partikeldispersion nur für Diffusionszeiten, die weder kurz noch sehr lang sind, aus. Für beliebig lange Diffusionszeiten folgt aus der Gleichung (5.15)

$$\epsilon_p = \overline{u'^2} \int_0^{\infty} E_p\left(\frac{\omega \cdot t}{t}\right) \cdot \frac{\sin \omega t}{\omega t} d(\omega t) \rightarrow E_p(0) \cdot \overline{u'^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

$$\epsilon_p = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{u'^2} \cdot E_p(0) \quad (5.17)$$

Hinze [27, S.360] interpretiert diese Gleichung dahingehend, daß bei einer verschwindenden Frequenz die Natur des Widerstandsgesetzes keine Rolle für ϵ_p spielen kann, da die Geschwindigkeiten von Partikel und Turbulenzballen sich vollständig angleichen.

Für die Diffusion der Flüssigkeit wird man auf ein analoges Ergebnis geführt; in Zusammenhang mit Gleichung (5.13) folgt für lange Diffusionszeiten

$$\epsilon_p = \epsilon_f \quad (5.18)$$

Dieses Ergebnis ist keineswegs überraschend. Die Berechnung der Partikeldispersion nach der Bewegungsgleichung impliziert ein mindestens ebenso langes Verweilen der Partikel im Turbulenzballen. Für beliebig lange Zeiten werden die Partikel durch den Turbulenzballen zu jedem Punkt im Raum hingeführt.

Für kurze Diffusionszeiten folgt aus der Definition der Autokorrelation mit Gleichung (5.10): $R(\tau) \approx 1$

$$\epsilon_p \approx \overline{u'^2} \cdot t \quad \epsilon_f \approx \overline{v^2} \cdot t$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\epsilon_p(t)}{\epsilon_f(t)} = \frac{\overline{u'^2}}{\overline{v^2}} \quad (5.19)$$

Die Ergebnisse (5.18) und (5.19) sind in der Arbeit von Tchen [77] enthalten. Tchen erhielt diese Ergebnisse sowohl für die vollständige Bewegungsgleichung der Schleichströmung, wie für eine um den Basset-Term verkürzte Gleichung. Die eigentliche Ursache für diesen Sachverhalt ist in den Definitionen und in

den Voraussetzungen der Rechnung zu sehen; denn nur für Diffusionszeiten $0 < t < \infty$ ist ein Einfluß der Bewegungsgleichung und damit auch des Strömungswiderstandes auf die Feststoffdispersion zu verzeichnen.

Für gaußverteilte stochastische Schwankungsbewegungen des Turbulenzballens wird man wegen der Querverbindung, die zu einem harmonisch pulsierenden Strömungsfeld besteht, für endliche Diffusionszeiten

$$\epsilon_p < \epsilon_f$$

erwarten, da das Amplitudenverhältnis für $\omega > 0$ Werte kleiner als eins annimmt. Da andererseits die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit im harmonisch pulsierenden Strömungsfeld kleiner als die in einer ruhenden Flüssigkeit ist

$$\bar{u} < w_f$$

muß für eine symmetrische Amplitudenverteilung der Schwankungsgeschwindigkeit des Turbulenzballens ebenfalls mit einer Reduzierung der Sinkgeschwindigkeit gerechnet werden. Für die eindimensionale Transportgleichung zieht dieser Sachverhalt nach sich, daß die das Konzentrationsprofil bestimmende Größe

$$\frac{\epsilon_p}{\bar{u}} \lesssim \frac{\epsilon_f}{w_f}$$

sein kann. Die übliche Annahme $\bar{u} = w_f$ führt daher i.a. zu einer Fehlinterpretation der aus Konzentrationsverteilungen bestimmten Partikeldispersion ϵ_p .

Die turbulente Bewegung kann nicht vollständig durch Korrelationsfunktionen $R(\tau)$ oder spektrale Leistungsdichten $E(\omega)$ beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der turbulenten Schwankungen muß ebenso mit herangezogen werden. Nun müssen die Schwankungsbewegungen nicht unbedingt normalverteilt sein. Die Zufallsschwankungen müssen noch nicht einmal eine symmetrische Amplitudenverteilung besitzen. Asymmetrische Verteilungen können aber Effekte bewirken, die bei symmetrischen Verteilungen nicht eintreten.

Einer deterministischen Funktion kann eine Amplitudenverteilung zugeordnet werden, wenn die unabhängige Variable - in diesem Falle die Zeit - als eine stochastische Variable mit einer Gleichverteilung aufgefaßt wird. Für ein sinusförmiges Signal $x = x_0 \sin \omega t$ kann die Berechnung der Amplitudenverteilung wegen der Periodizität auf ein Intervall $-\pi/2 < \omega t < \pi/2$ eingeengt werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Amplitude einen Wert zwischen x und $x+dx$ annimmt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß die $x(t)$ zugeordnete Zeit zwischen t und $t+dt$ liegt, d.h.

$$p(t) dt = p(x) dx$$

Mit der Gleichwahrscheinlichkeit von t wird die Amplitudenverteilungsdichte eines sinusförmigen Signals zu

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{x_0^2 - x^2} & \text{für } |x| < x_0 \\ 0 & \text{für } |x| > x_0 \end{cases}$$

berechnet. In der Abbildung 5.2 a ist diese Verteilung wiedergegeben. Die Verteilung eines sinusförmigen Signals ist, wie erwartet wird, symmetrisch.

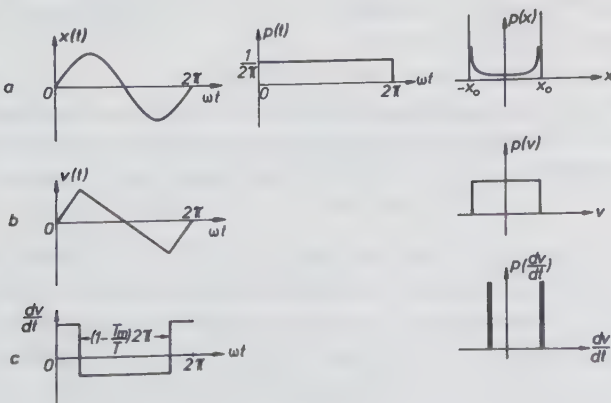


Abb. 5.2: Zeitgesetze mit Amplitudenverteilung

Der Einfluß einer asymmetrischen Amplitudenverteilung der Schwankungsgeschwindigkeit auf die zeitlich mittlere Fallgeschwindigkeit kann durch ein zeitlich asymmetrisches Gesetz der Pulsation in der Bewegungsgleichung simuliert werden. Eine Pulsation des Strömungsfeldes nach einem Zeitgesetz, wie es in der Abb. 5.2 b dargestellt ist, führt für die Beschleunigung des Mediums zu einem zeitlichen Verlauf, der in Abb. 5.2 c dargestellt ist. Die hierzu gehörende Amplitudenverteilung ist asymmetrisch und setzt sich aus zwei Dirac-Stößen zusammen. Das Verhältnis des Zeitabschnittes T_m mit abwärts gerichteter Geschwindigkeit zur Schwingungsdauer T der Pulsation wird zur Charakterisierung der Asymmetrie herangezogen. Für eine Fourier-Approximation dieses Zeitgesetzes von 5. Ordnung ist die quasistationäre Bewegungsgleichung numerisch gelöst worden. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 5.3 dargestellt.

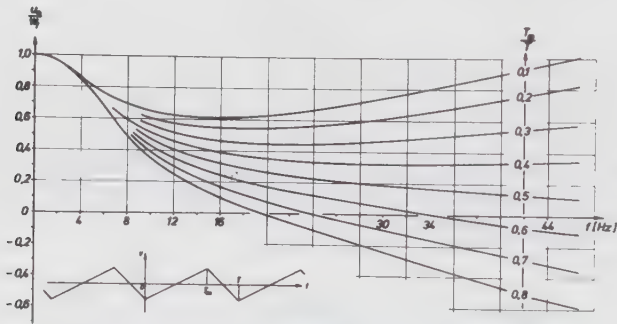


Abb. 5.3: Frequenzabhängigkeit der mittleren Sinkgeschwindigkeit, $d = 2$ mm, $A = 20$ mm, $\rho_p/\rho_f = 2.5$, $c_a = 0.5$, $c_H = 0$

Für ein symmetrisches Zeitgesetz $T_m/T = 0.5$ stimmen die Werte u_0/w_f innerhalb der numerischen Genauigkeit mit jenen für eine sinusförmige Pulsation überein. Hier zeigt sich, daß der Abbremsseffekt für symmetrische Amplitudenverteilungen in etwa übertragbar ist. Für ein asymmetrisches Zeitgesetz mit einer

zeitlich längeren Aufwärts- als Abwärtsbewegung des Strömungsfeldes, $T_m/T < 0.5$, nimmt die Sinkgeschwindigkeit zunächst mit der Frequenz ab, später jedoch zu; sie kann sogar größer als die Sinkgeschwindigkeit in einer ruhenden Flüssigkeit werden. Für T_m/T größer als 0.5 nimmt die Sinkgeschwindigkeit monoton ab; sie kann im Gegensatz zur symmetrischen Pulsation sogar negativ werden, das heißt die Kugel steigt entgegen der Erdschwere auf.

Das Schweben eines kugelförmigen Teilchens in einem Strömungsfeld mit asymmetrischer Amplitudenverteilung ist von van Oeveren und Houghton [81] experimentell nachgewiesen worden. - Ebenso nutzen einige Insekten die Asymmetrie im Bewegungsablauf ihrer Flügel aus, um zu fliegen [32] .

Der naheliegende Schluß von einer Reduzierung der Fallgeschwindigkeit eines kugelförmigen Teilchens in einem harmonisch pulsierenden Strömungsfeld auf eine Reduzierung in einer turbulent strömenden Flüssigkeit ist nur mit Vorsicht zu ziehen. In einem homogenen Turbulenzfeld, wie es z.B. in der Mitte einer Rohrströmung anzutreffen ist, wird man eine Reduzierung der Sinkgeschwindigkeit erwarten, da die Amplitudenverteilung symmetrisch ist. Diese Aussage stimmt mit dem experimentellen Befund überein. In der wandnahen Zone zeigen jedoch die Messungen von Laufer [44] eine asymmetrische Amplitudenverteilung der radialen Schwankungsgeschwindigkeit, $\bar{v}^2 < 0$, an. Die zur Wand gerichtete Schwankungsgeschwindigkeit ($v > 0$) besitzt im zeitlichen Mittel kleinere Amplituden als die zur Rohrmitte gerichtete ($v < 0$). Inwieweit die beobachtete Verarmung an Feststoff in der wandnahen Zone durch die asymmetrische Amplitudenverteilung der Schwankungsbewegung v begünstigt wird, bleibt dahingestellt.

6. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit wird die Bewegung einer sedimentierenden Kugel in einer pulsierenden Strömung untersucht. Durch eine analytische Näherungslösung wird die durch den nicht-linearen, quasistationären Strömungswiderstand verursachte Sinkgeschwindigkeitsverringerung aufgeklärt. Versuche über das Bewegungsverhalten zeigen, daß die in der ingenieurmäßigen Praxis verwendete quasistationäre Bewegungsgleichung für zeitlich veränderliche Strömungsfelder nur begrenzt gültig ist.

Die Sinkgeschwindigkeit einer Kugel im vertikal, harmonisch pulsierenden Strömungsfeld ist nicht größer als die Sinkgeschwindigkeit in einer ruhenden Flüssigkeit. Ein Analogieschluß auf die Sinkgeschwindigkeit einer Partikel in einem Turbulenzfeld ist für asymmetrische Amplitudenverteilungen der Schwankungsgeschwindigkeit nicht zulässig.

Eine Beschreibung des Partikelverhaltens bei wirbelablösender Umströmung ist nach der quasistationären Bewegungsgleichung nur für kleine Werte der dimensionslosen Gruppe $f \cdot d/w_f$ zutreffend. Der Schwellenwert scheint bei 0.02 zu liegen. Für höhere Werte von $f \cdot d/w_f$ treten Interferenzen zwischen dem Nachlauf und der den Nachlauf erzeugenden Kugel auf, die eine bedeutend stärkere Verringerung der zeitlich mittleren Sinkgeschwindigkeit bewirken. In dem Frequenzbereich mit synchroner Wirbelablösung führt die Kugel regelmäßige Querbewegungen aus.

Genügend hohe Werte der Frequenz des Strömungsfeldes verhindern die Wirbelablösung an der Kugel. Die zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit nimmt auch in diesem Fall kleinere Werte als in einer ruhenden Flüssigkeit an, ist aber größer als nach der quasistationären Bewegungsgleichung erwartet wird.

Kommt es bei der Umströmung nicht zur Wirbelablösung an der Kugel, dann läßt sich das Bewegungsverhalten einer Kugel im oszillierenden Strömungsfeld am genauesten nach einer Bewegungsgleichung berechnen, in die der Strömungswiderstand nach Odar

eingeführt wird. Nach dieser Bewegungsgleichung läßt sich sowohl die Kraftwirkung auf eine in einer Flüssigkeit schwingenden Kugel [58] als auch die Beschleunigungsphase einer sedimentierenden Kugel in einer ruhenden Flüssigkeit [59,60; Versuche von 56] hinreichend genau beschreiben. Ferner heben sich die Versuchsergebnisse einer dem pulsierenden Strömungsfeld frei ausgesetzten Kugel am wenigsten von den Aussagen dieser Bewegungsgleichung ab. Es steht daher zu vermuten, daß die Anwendung dieser Bewegungsgleichung über die genannten Bewegungsabläufe hinaus zu richtigen Ergebnissen führt.

7. Symbole

- a Abbildungsparameter Gl. (4.5)
- A Amplitude des Strömungsfeldes
- $\tilde{A}$ Auftrieb
- Ac Beschleunigungszahl Gl. (2.13)
- Ar Archimedeszahl Gl. (2.5)
- b Abbildungsparameter Gl. (4.5)
- c Konzentration
- c_a Koeffizient der scheinbaren Masse
- c_H Koeffizient des Basset-Terms
- c_w stationärer Widerstandsbeiwert
- c_{wi} instationärer Widerstandsbeiwert
- c_1 } Konstanten der Widerstandsbeiwert-Approximation
- c_2 }
- d Kugeldurchmesser
- D Zylinderdurchmesser
- $d(\tau)$ Fehler des Lösungsansatzes Gl. (3.11)
- e Abbremsseffekt Gl. (3.32)
- e_0 Abbremsseffekt für $M = 0$
- E Turbulenzspektrum
- f Frequenz des Strömungsfeldes
- $f(\tau)$ linearer Anteil des Fehlers $d(\tau)$
- f_{abl} Frequenz der Wirbelablösung
- f_1 }
- f_2 } Hsere Harmonische der Abbildungsbeziehung Gl. (4.4)
- f_3 }
- g Erdbeschleunigung
- $\tilde{G}$ Gewicht
- h Höhe
- m ganzes Vielfaches der Drehspiegelfrequenz
- M Stokes-Anteil
- $\underline{n}$ Normaleneinheitsvektor der Reflexionsebene Gl. (4.2)
- p Wahrscheinlichkeitsdichte
- r Abbildungsradius
- $R(\tau)$ Autokorrelationsfunktion
- Re Reynoldszahl Gl. (2.5)
- Re_0 Reynoldszahl der zeitlich mittleren Geschwindigkeit
- Re_1 Reynoldszahl des oszillierenden Geschwindigkeitsanteils
- Re_{ogr} Reynoldszahl für den Anströmwechsel
- Re_{ruh} Reynoldszahl gebildet mit w_0

s_1	} oszillierender Bewegungsanteil Gl. (4.8)
s_{11}	
s_{12}	
St	Stokes-Zahl Gl. (2.11)
Str	Strouhal-Zahl Gl. (2.7)
t	Zeit
T	Schwingungsdauer
$\bar{T}$	Trägheitskraft
T_m/T	Asymmetrieparameter
u	Absolutgeschwindigkeit der Kugel
u_o	zeitlich mittlere Sinkgeschwindigkeit
u_1	Amplitudes des oszillierenden Geschwindigkeitsanteils
u_{rel}	Relativgeschwindigkeit
v	Geschwindigkeit der Flüssigkeit
w_f	Sinkgeschwindigkeit in ruhender Flüssigkeit
$\bar{W}$	Widerstand
$\bar{x}$	Kugelposition
$\bar{x}(t)$	mittleres Verschiebungsquadrat
y	Bildpunkt
z	= Re_o/Re_1
Z	Durchstoßpunkt (Reflexionsebene - Drehachse)
δ	Phasenlage des Drehspiegels
ϵ	Phase Gl. (3.4)
ϵ_p	Partikeldiffusivität
ϵ_f	Diffusivität der Flüssigkeit
ζ	Kennzahl Gl. (3.35)
η^2	Beschleunigungsverhältnis Gl. (3.6)
λ	Wert des Skalarproduktes Gl. (4.1)
ν	Viskosität der Flüssigkeit
ρ_p	Dichte des Kugelmateri als
ρ_f	Dichte der Flüssigkeit
σ^2	Varianz der Fehlerverteilung
τ	dimensionslose Zeit Gl. (2.17) , in Kap. 5 Korrelationszeit
τ_1	} Zeitpunkte des Anströmwechsels
τ_2	
φ	Auslenkwinkel der Reflexionsebene des Spiegels
ω	Kreisfrequenz des Strömungsfeldes
γ	Kreisfrequenz des Drehspiegels
ξ	Kennzahl Gl. (2.19)

8. Literaturverzeichnis

- [1] Basset, A.B.: On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid, Phil. Trans. Roy. Soc., A 179 (1888), S. 43/69
- [2] Basset, A.B.: On the Descent of a Sphere in a Viscous Liquid, The Quarterly Journal of Mathematics, 41 (1910) London, S.369/381
- [3] Baird, M.H.I., Senior, M.G. und Thompson, R.J.: Terminal velocities of spherical particles in a vertically oscillating liquid, Chemical Engineering Science (1967) Vol. 22, S. 551/558
- [4] Batchelor, G.K.: Diffusion in a field of homogeneous turbulence, Australian Journal Science Research, Vol. 2 (1949), S. 437/450
- [5] Batchelor, G.K.: The Theory of Homogenous Turbulence, Cambridge University Press (1967)
- [6] Berger, E.: Suppression of vortex shedding and turbulence behind oscillating cylinders, Phys. Fluid Suppl. (1967), S. 191/193
- [7] Bogoljubow, N.N. und Mitropolski, J.A.: Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen, Berlin (1965)
- [8] Boothroyd, R.G.: Flowing Gas-Solid Suspensions Chapman and Hall London (1971)
- [9] Boussinesq, J.V.: Sur la resistance.....d'une sphere solide, C.R. des Sances de l'Academie, 100, (1885) 935
- [10] Brush, L.M., Ho, H.W. und Yen, B.C.: Accelerated motion of a sphere in a viscous fluid, Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 90, HY 1, (1964), S. 149/160

- [11] Brush, L.M., Ho, H.W., Singamsetti, S.R.: A study of sediment in suspension, publication no. 59 of the I.A.S.H. Commission of Land Erosion, (1963), S. 293/310
- [12] Bugliarello, G.: La resistenza al moto accelerato di sfere in acqua, La Ricerca Scientifica , 26 (1956), S. 437/442
- [13] Carstens, M.R.: Accelerated motion of a spherical particle, Transactions of the American Geophysikal Union Vol. 33, (1953), S. 713/721
- [14] Chao, B.T.: Turbulent Transport Behavior of Small Particles in Dilute Suspension, Österreichisches Ingenieurarchiv Band 18 , (1964), S. 7/21
- [15] Corrsin, S. und Lumley, J.: On the equation of motion for a particle in turbulent fluid, Applied Science Research, Sec. A Vol. 6, (1956), S. 114
- [16] Davies, C.N.: Definitive for the fluid resistance of spheres, The Proceedings of the Physical Society Vol. 57, (1945), S. 259/270
- [17] Endoh, K. und Hirano, H.: Force on a sphere at maximum relative velocity in a sinusoidally vibrating liquid, Kagaku Kogaku Vol. 35, (1971), S. 883/7
- [18] El-Tawil, A.: Dynamics of single spheres in pulsated liquids, Dissertation University of Colorado (1969)
- [19] Fiedler, H.: Drehspiegelkamera hoher Zeitauflösung I Wissenschaftliche Zeitschrift der T.H. Magdeburg 11 (1967), S. 605/610
- [20] Fiedler, H.: Drehspiegelkamera hoher Zeitauflösung II Wissenschaftliche Zeitschrift der T.H. Magdeburg 15 (1971), S. 209/218

- [21] Field, W.G.: Effects on density ratio on sedimentary similitude, Proceedings of the American Society of Civil Engineers (1968) HY 3, S. 705/719
- [22] Fidleris, V. und Whitmore, R.L.: Experimental determination of the wall effect for spheres falling axially in cylindrical vessels, British Journal of Applied Physics Vol. 12, (1961), S. 490/494
- [23] Friedländer, S.K.: Behavior of suspended particles in a turbulent fluid, AIChE Journal Vol. 3, (1957), S. 381/385
- [24] Fung, Y.C.: Fluctuating Lift and Drag Acting on a Cylinder in a Flow at Supercritical Reynolds Numbers, Journal of the Aerospace Sciences Vol. 27 (1960) , S. 801/814
- [25] Goldberg, A. und Florsheim, B.H.: Transition and Strouhal-Number for the Incompressible Wake of Various Bodies, The Physics of Fluids, Vol. 9 (1966), S. 45/50
- [26] Hertel, H., Affeld, K. und Clauss, G.: Die vibrierende Kamera, ein photographisches Verfahren zur Geschwindigkeitsmessung, VDI-Zeitschrift Band 111 (1969), S. 496/500
- [27] Hinze, J.O.: Turbulence
McGraw. Hill Book Company New York (1959)
- [28] Hinze, J.O.: Turbulent Fluid and Particle Interaction
Progress in Heat and Mass Transfer Vol. 6
(1972), S. 433/452
- [29] Hjelmfelt, A.T. und Mockros, L.F.: Motion of discrete particles in a turbulent fluid, Applied Science Research Vol. 16 (1966), S. 149/161
- [30] Ho, H.W.: Fallvelocity of a sphere in an oscillating fluid, Dissertation, Iowa- University (1964)

- [31] Houghton, G.: The Behaviour of Particles in a sinusoidal Velocity Field, Proceedings of the Royal Society, Vol. 272, (1963), S. 33/43
- [32] Houghton, G.: Effect of Variation in Lift Coefficient, Phase Angle and Waveform on fluttering Lift in the Desert Locust, Nature Vol. 202, (1964), S. 870/872
- [33] Houghton, G.: Particle Retardation in vertically oscillating Fluids, The Canadian Journal of Chemical Engineering Vol. 46, (1968), S. 79/81
- [34] Houghton, G.: Particles Trajectories and Terminal Velocities in vertically oscillating Fluids, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 44 (1966), S. 90/95
- [35] Houghton, G.: Velocity retardation of particles in oscillating fluids, Chemical Engineering Science Vol. 23, (1968), S. 287/288
- [36] Hughes, R.R. und Gilliland, E.R.: The Mechanics of Drops, Chemical Engineering Progress Vol. 48, (1952), S. 497/504
- [37] Ingebo, R.D.: N.A.C.A. Technical Note 3265 (1954)
N.A.C.A. Technical Note 3762 (1956)
- [38] Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik
Springer-Verlag, Berlin (1958)
- [39] König, W.: Hydrodynamisch-akustische Untersuchungen
Annalen der Physik und Chemie, Neue Folge
Band XLII, (1891), S.353/370
- [40] König, W.: Über das Mitschwingen kleiner Körper in Schallwellen, Annalen der Physik Band 49, (1916), S. 648/652

- [41] Keulegan, G.H. und Carpenter, L.H.: Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 60 (1958), S. 423/440
- [42] Kürten, H., Raasch, J. und Rumpf, H.: Beschleunigung eines kugelförmigen Feststoffteilchens im Strömungsfeld konstanter Geschwindigkeit, Chemie-Ingenieur-Technik 38 (1966), S. 941/948
- [43] Kuychoukov, G. , Molinier, J. und Angelino, H.: Influence de la pulsation sur le temps de séjour d'une particule dans un liquide, Chimie et Industrie-Genie Chimique Vol. 103, (1970), S. 1405/13
- [44] Laufer, J.: The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, N.A.C.A. Report 1174 (1954)
- [45] LeClair, B.P. und Hamillec, A.E.: Flow Behaviour around a Sphere accelerating in a viscous Fluid, Fluid Dynamic Symposium Hamilton Canada (1970)
- [46] Liu, V.C.: Turbulent Dispersion of dynamic Particle, Journal of Meterology Vol. 13 , (1956), S. 399/405
- [47] Lunnon, R.G.: Fluid Resistance to Moving Spheres Proceedings of the Royal Society London, Ser. A, Vol. 110, (1926), S. 302/325
- [48] Lunnon, R.G.: Fluid Resistance to Moving Spheres Proceedings of the Royal Society London, Ser. A, Vol. 118, (1928), S. 680/694
- [49] Lunnon, R.G.: The Laws of Motion of Particles in a Fluid, Transactions-Institution of Mining Engineers Vol. LXXVII , (1929), S. 65/75
- [50] Liebster, H.: Über den Widerstand von Kugeln Annalen der Physik Band 82, (1927), S. 541/561

- [51] Magnus, K.: Schwingungen
Teubner Verlagsgemeinschaft Stuttgart (1961)
- [52] Magarvey, R.H. und Blackford, B.L.: Wake Metamorphism
Behind A Sphere, Canadian Journal of Physics,
Vol. 40 (1962), S. 1036/1040
- [53] Molerus, O.: Teilchenbewegung in einem pulsierenden
Strömungsfeld, Chemie-Ingenieur-Technik
(1964), S. 866/870
- [54] Molerus, O. und Werther, J.: Berechnung der Sinkbe-
wegung kugelliger Teilchen in einem vertikal
pulsierenden Strömungsfeld, Chemie-Ingenieur-
Technik (1968), S. 522/524
- [55] Molinier, J. , Kuychoukov, G. und Angelino, H.: Etude
du mouvement d'une sphere dans un liquide
pulse, Chemical Engineering Science Vol. 26
(1971), S. 1401/1412
- [56] Moorman, R.W.: Motion of a Spherical Particle in the
Accelerated Portion of Free Fall
Dissertation Iowa University (1955)
- [57] Mühle, J.: Partikelbewegungen in Strömungen mit
rotationssymmetrischer Geschwindigkeitsver-
teilung, Dissertation Berlin (1969)
- [58] Odar, F. und Hamilton, W.S.: Force on a Sphere accele-
rating in a viscous Fluid, Journal of Fluid
Mechanics Vol. 18 (1964), S. 302/314
- [59] Odar, F.: Verification of the proposed equation for
calculation of the forces on a sphere accele-
rating in a viscous fluid, US Army CRREL ,
RR 190, (1966)
- [60] Odar, F.: Verification of the proposed equation for
calculation of the forces on a sphere accele-
rating in a viscous fluid, J. Fluid Mech. (1966)
Vol. 25 , S. 591/592

- [61] Oseen, C.W.: Hydrodynamik
Akademische Verlagsgemeinschaft Leipzig (1927)
S. 132
- [62] Poisson, S.D.: Memoire sur les Mouvements Similtanés
d'un Pendule et de l'Air Environnant,
Mem. Acad. Sci., Paris Vol. 11, (1832), S.521
- [63] L. Rayleigh: On the Motion of solid Bodies through
viscous Liquid, Philosophical Magazine and
Journal of Science, London Vol. 21 (1911),
S. 697/711
- [64] Rimon, Y. und Cheng, S.I.: Numerical Solution of a
Uniform Flow over a Sphere at Intermediate
Reynolds Numbers, The Physics of Fluids Vol. 12
(1969), S. 949/959
- [65] Schauki, N.: Der Widerstand von Zylinder und Kugel bei
instationären Strömungsverhältnissen,
Dissertation Karlsruhe (1972)
- [66] Schiller, L. und Naumann, A.: Über die grundlegenden
Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung
VDI-Zeitschrift Band 77 (1933), S. 318/320
- [67] Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun. Karlsruhe (1965)
- [68] Schlitt, H.: Stochastische Vorgänge in linearen und
nichtlinearen Regelkreisen, Verlag Vieweg
Braunschweig (1968)
- [69] Schmidt, F.S.: Zur beschleunigten Bewegung kugelförmiger
Körper in widerstehenden Mitteln
Dissertation Leipzig (1919), auch Annalen der
Physik 61 (1920) S. 633
- [70] Sedrak, M.: Widerstandsmessungen am schwingenden
Zylinder bei kleinen Reynoldszahlen
Dissertation Berlin (1971)

- [71] Smirnow, N.W. und Dunin-Barkowski, L.W.:
Mathematische Statistik in der Technik
VEB Verlag der Wissenschaften Berlin (1969)
- [72] Soo, S.L.: Fluid Dynamics of Multiphase Systems
Blaisdell Publishing Company, Waltham (1967)
- [73] Soo, S.L.: Statistical properties of momentum transfer
in two-phase flow, Chemical Engineering Science
Vol. 5 (1956), S. 57/67
- [73'] Stokes, G.G.: On the Effect of the Internal Friction
of Fluids on the Motion of Pendulums,
Trans. Comb. Phil. Soc. 9 (1850), 8
- [74] Tanaka, Z. und Iinoya, K.: New Approximate Equation of
Drag Coefficient for Spherical Particles,
Journal of Chemical Engineering of Japan,
Vol. 3 (1970), S. 261/262
- [75] Taneda, S.: Studies on Wake Vortices (III),
Experimental Investigation of the Wake behind
a Sphere at Low Reynolds Numbers, Reports of
Research Institute for Applied Mechanics Vol. IV
(1956), S. 99/105
- [76] Taylor, G.I.: Diffusion by continuous movement,
Proceedings of the London Mathematical Society,
Ser. 2, Vol. 20 (1921), S. 196/211
- [77] Tchen, C.M.: Mean Value and Correlation Problems
connected with the Motion of small Particles
suspended in a turbulent Fluid,
Dissertation Delft (1947)
- [78] Torobin, L.B. und Gauvin, W.H.: Fundamental Aspects of
Solids-Gas Flow, Part I/VI, Canadian Journal
of Chemical Engineering,
(1959), S. 129/141, S. 167/176, S. 224/236;
(1960), S. 142/153, S. 189/200; (1961), S. 113/9

- [79] Torobin, L.B. und Gauvin, W.H.: The Drag Coefficient of Single Spheres Moving in Steady and Accelerated Motion in a Turbulent Fluid, AIChE Journal Vol. 7 (1961) S. 615/619
- [80] Tunstall, E.B. und Houghton, G.: Retardation of falling sphere by hydrodynamic oscillation, Chemical Engineering Science Vol. 23 (1968) , S. 1067/ S. 1081
- [81] van Oeveren, R.M. und Houghton, G.: Levitation and counter-gravity motion of spheres by non-uniform hydrodynamic oscillation, Chemical Engineering Science Vol. 26, (1971) S. 1958/1961
- [82] von Karman, Th. und Rubach, H.: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, Physikalische Zeitschrift Band 13 (1912), S. 49/59
- [83] von Karman, Th.: Die Wirbelstraße Hoffmann und Campe (1968)
- [84] von Sanden, H.: Zur Theorie der Setzmaschine, Glückauf 57. Jahrgang (1921), S. 1273/1279
- [85] Viets, H.: Accelerating Sphere-Wake Interaction, American Institute of Aeronautics and Astronautics Vol. 9 (1971), S. 2087/2089
- [86] Wagenschein, M.: Experimentelle Untersuchung über das Mitschwingen einer Kugel in einer schwingenden Flüssigkeits- oder Gasmasse, Annalen der Physik Band 65, Serie 4, (1921), S. 461/480

9. Diagramme

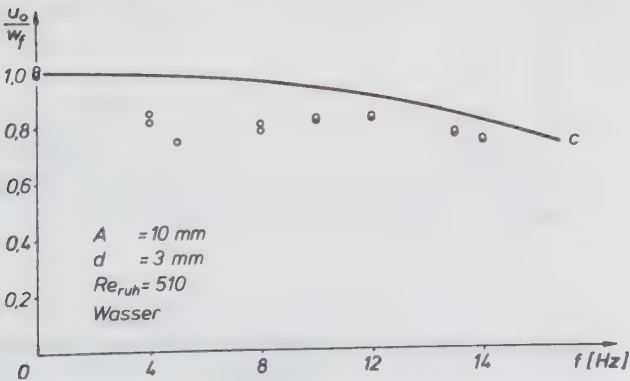
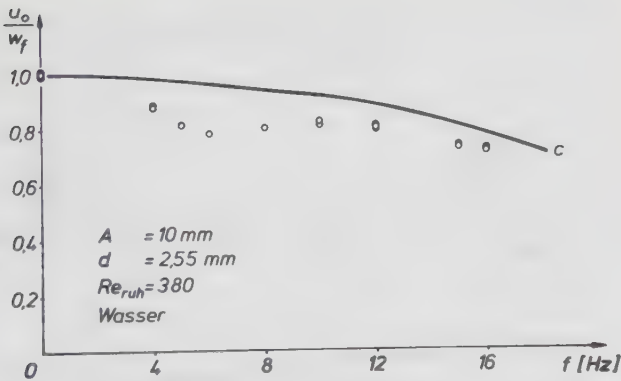
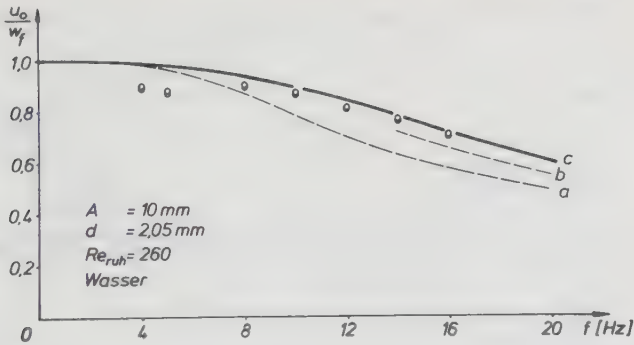


Abb. 9.1 , 9.2, 9.3 : Abbremsseffekt als Funktion der Frequenz

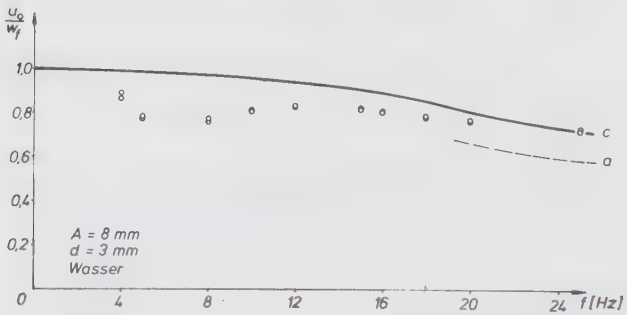
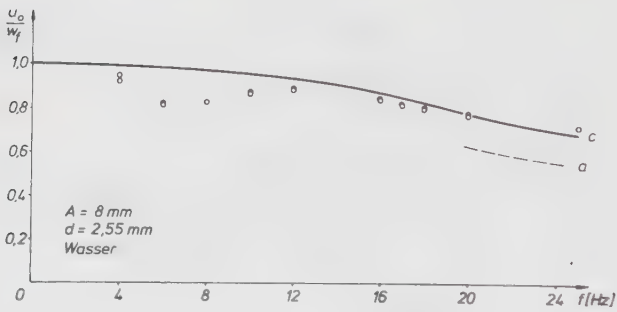
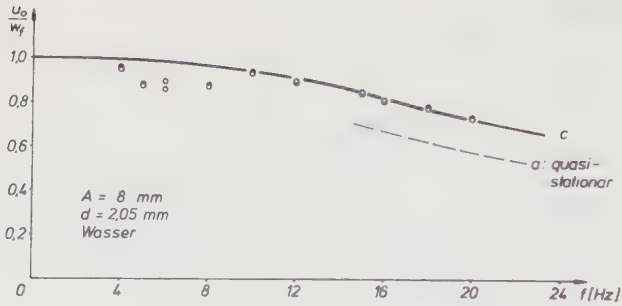


Abb. 9.4, 9.5, 9.6: Abbremseffekt als Funktion der Frequenz

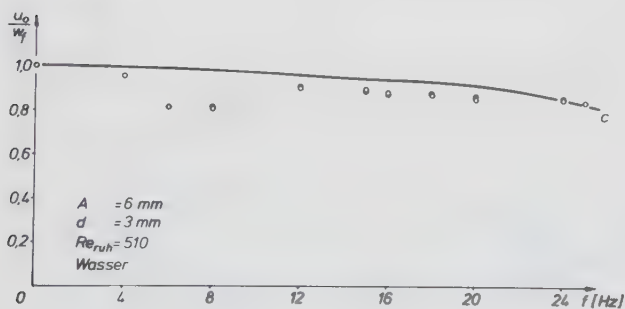
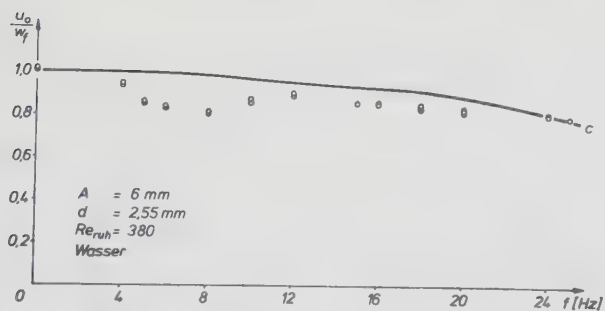
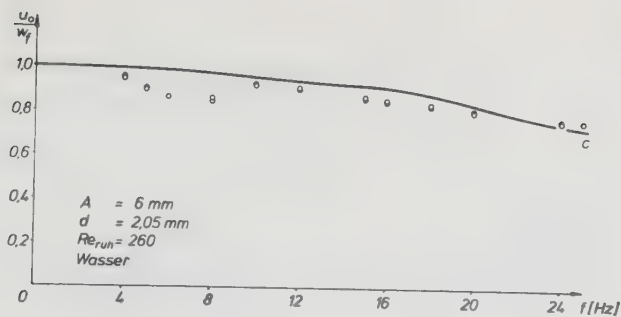


Abb. 9.7, 9.8, 9.9: Abbremseffekt als Funktion der Frequenz

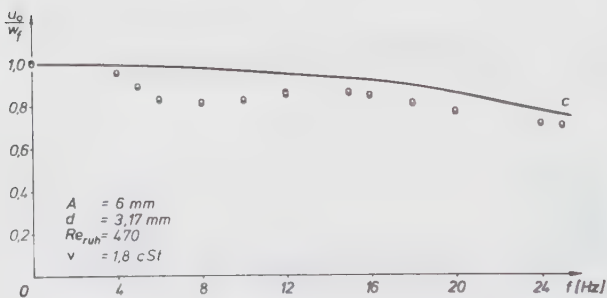
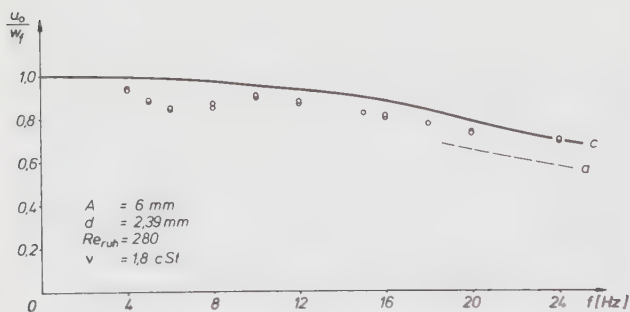
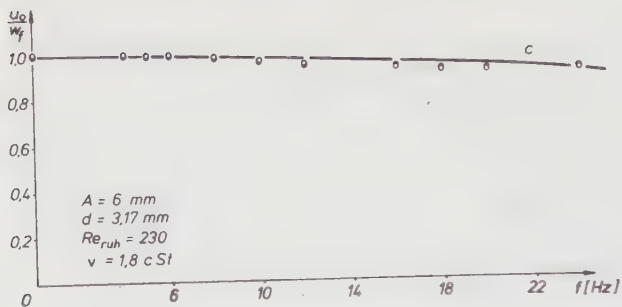


Abb. 9.10, 9.11, 9.12: Abbremseffekt als Funktion der Frequenz

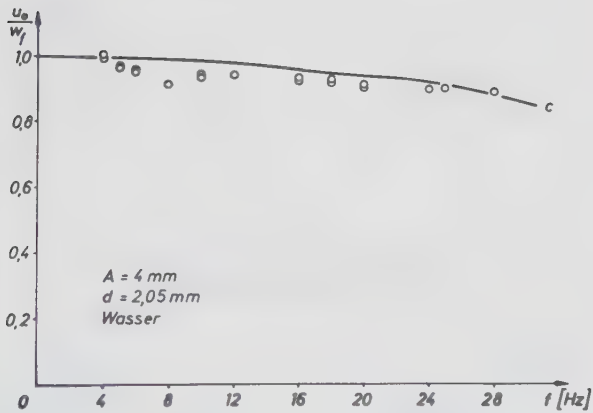
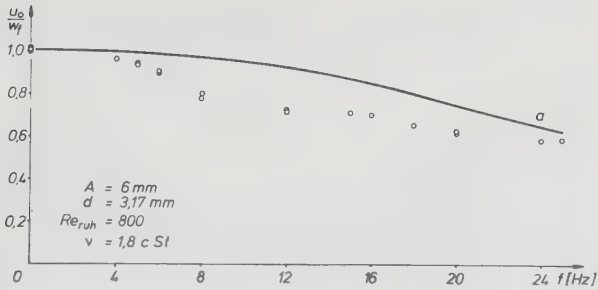


Abb. 9.13, 9.14: Abbremseffekt als Funktion der Frequenz

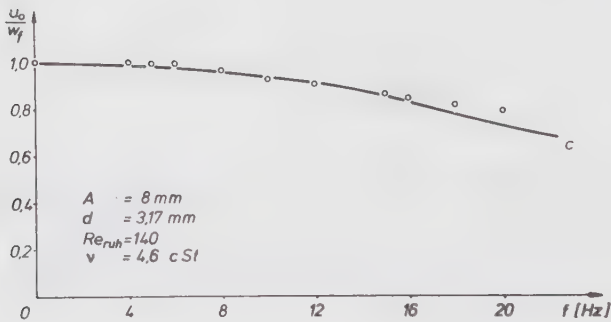
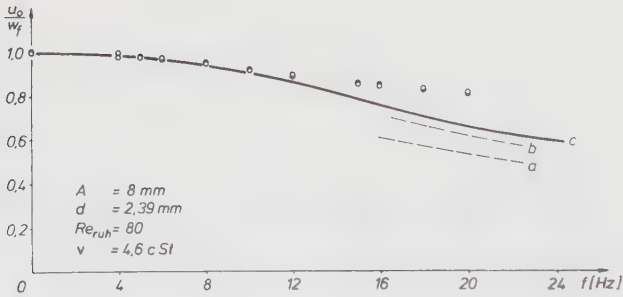
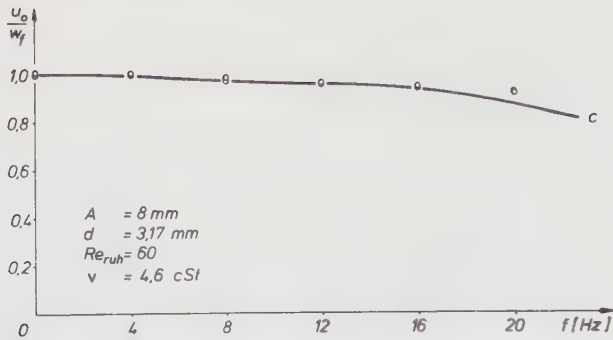


Abb. 9.15, 9.16, 9.17: Abbremsseffekt als Funktion der Frequenz

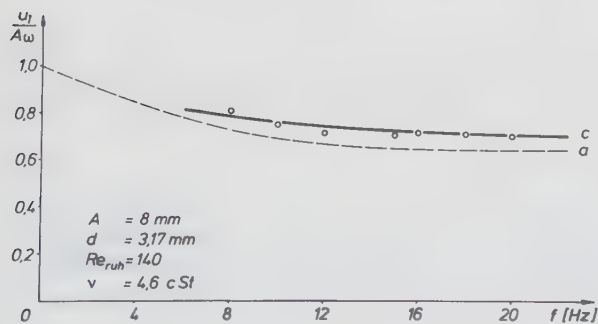
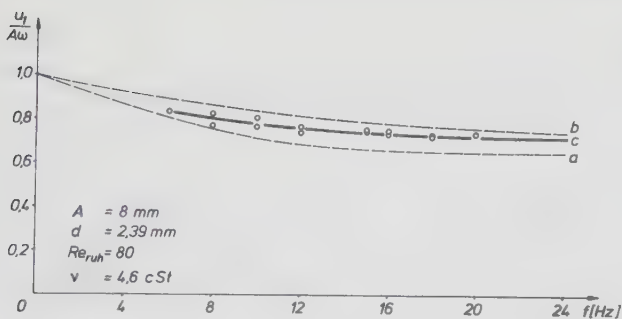
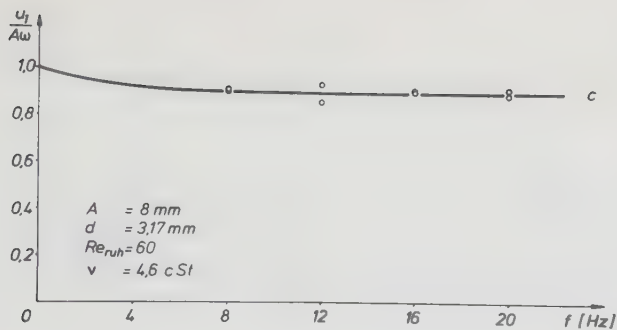


Abb. 9.18, 9.19, 9.20 : Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz

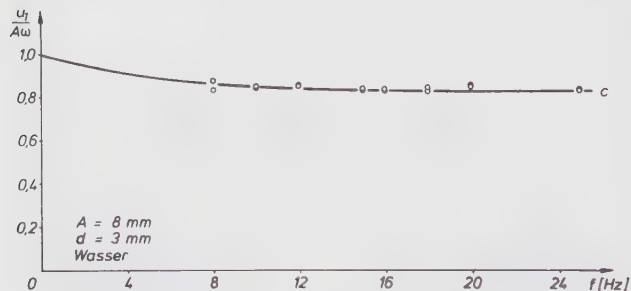
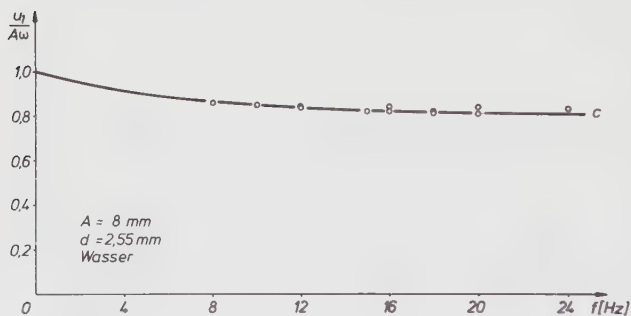
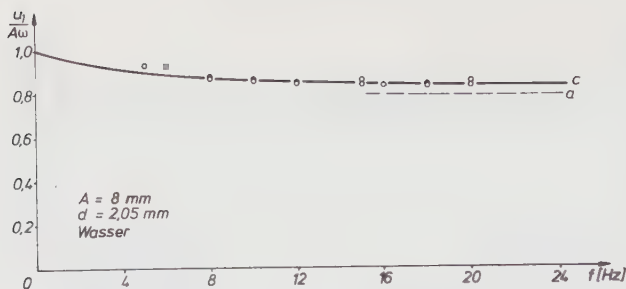


Abb. 9.21, 9.22, 9.23: Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz

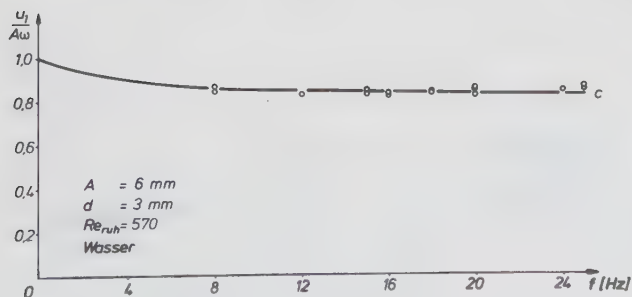
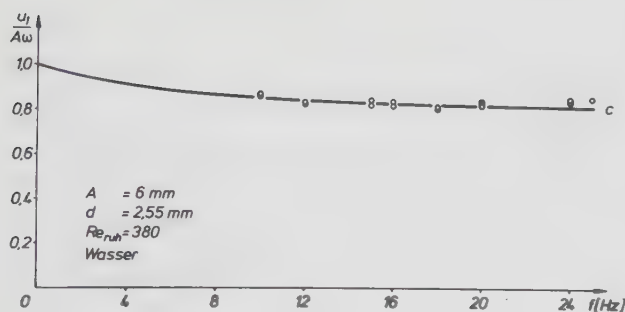
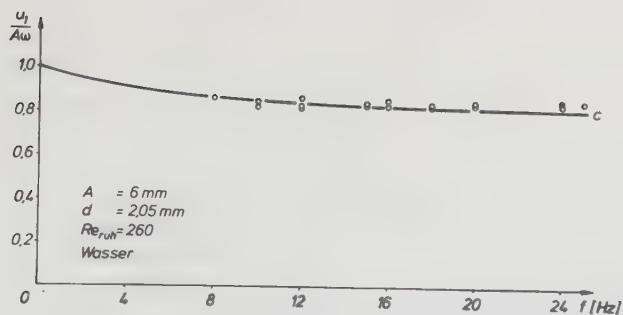


Abb. 9.24, 9.25, 9.26: Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz

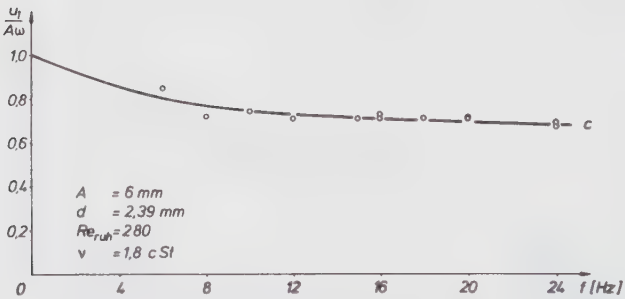
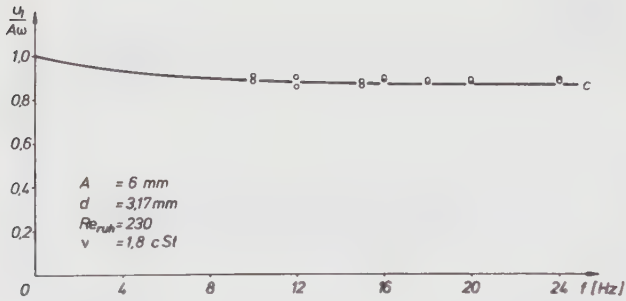


Abb. 9.27, 9.28: Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz

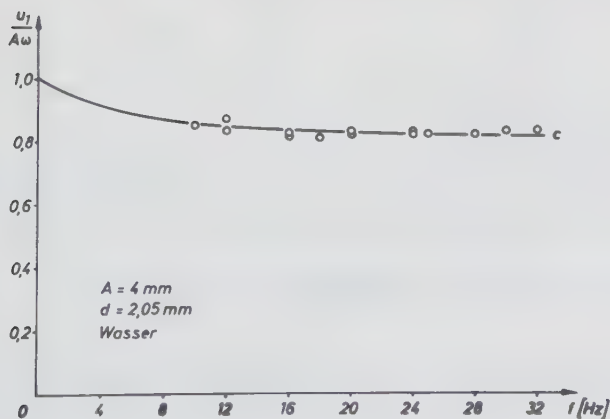
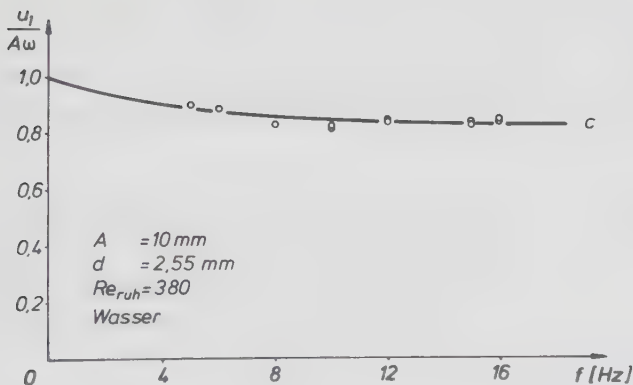
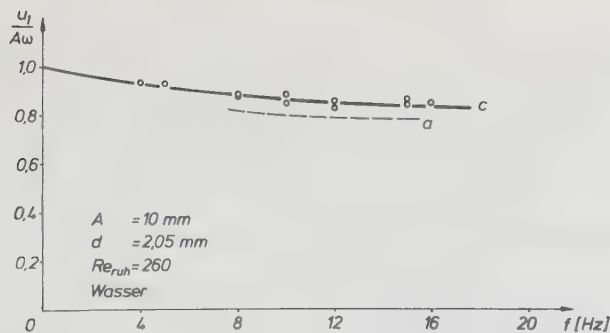


Abb. 9.29, 9.30, 9.31: Amplitudenverhältnis als Funktion der Frequenz

10. Anhang A

Für die quasilineare Beschreibung der Nichtlinearität

$$|Re_0 + Re_1 \sin \tau| \cdot (Re_0 + Re_1 \sin \tau) = Re_1^2 |z + \sin \tau| \cdot (z + \sin \tau)$$

ist es zweckmäßig von der Funktion

$$g(\tau) = (z + \sin \tau)^2 \quad (A.1)$$

mit $z = Re_0/Re_1$ auszugehen.

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten der Nichtlinearität erfordert die Unterscheidung zweier Fälle:

Gleichgerichtete Anströmung der Kugel liegt vor, wenn die zeitlich mittlere Relativgeschwindigkeit stets größer als der oszillierende Anteil ist, d.h.

$$Re_0/Re_1 > 1 \quad \text{oder} \quad z > 1$$

Die Funktion $g(\tau)$ besitzt keine reellen Nullstellen und die Nichtlinearität kann im gesamten Zeitbereich $-\pi < \tau < \pi$ durch $Re_1^2 \cdot g(\tau)$ dargestellt werden. Die Fourierkoeffizienten betragen somit

$$\begin{aligned} Re_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cdot d\tau &= 2\pi(Re_0^2 + Re_1^2 \cdot \frac{1}{2}) \\ Re_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cdot \sin \tau \cdot d\tau &= 2\pi \cdot Re_0 \cdot Re_1 \\ Re_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \cdot \cos \tau \cdot d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (A.2)$$

Wechselnde Anströmung

Die Relativgeschwindigkeit der Kugel zur umgebenden Flüssigkeit wechselt ihre Richtung, wenn $Re_0 < Re_1$ oder $z < 1$ gilt. Ein Anströmwechsel findet zu den Zeitpunkten τ_1 und τ_2 statt.

$$\tau_1 = -\arcsin(z)$$

$$\tau_2 = -\pi - \tau_1$$

Für den Zeitabschnitt $\tau_2 < \tau < \tau_1$ beträgt die Nichtlinearität

$$|Re_0 + Re_1 \sin \tau| \cdot (Re_0 + Re_1 \sin \tau) = -Re_1^2 \cdot g(\tau)$$

und für die Zeitintervalle $-\pi < \tau < \tau_2$ und $\tau_1 < \tau < \pi$

$$|Re_0 + Re_1 \sin \tau| \cdot (Re_0 + Re_1 \sin \tau) = Re_1^2 \cdot g(\tau)$$

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten führt wegen des Betragzeichens auf eine abschnittsweise Integration. Da die Nichtlinearität bis auf einen Vorzeichenwechsel in einem Zeitintervall durch die gleiche Funktion $g(\tau)$ beschrieben werden kann, folgt z.B. für den nullten Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |Re_0 + Re_1 \sin \tau| \cdot (Re_0 + Re_1 \sin \tau) d\tau &= Re_1^2 \int_{-\pi}^{\tau_1} g(\tau) d\tau - \\ &- Re_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(\tau) d\tau + Re_1^2 \int_{\tau_2}^{\pi} g(\tau) d\tau = \\ &= Re_1^2 \int_{-\pi}^{\tau_1} g(\tau) d\tau - 2Re_1^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die abschnittsweise Integration gestaltet sich für die ersten Fourierkoeffizienten analog. Das erste Integral ist schon berechnet worden (siehe A.2).

$$\begin{aligned} \int_{\tau_2}^{\tau_1} g(\tau) d\tau &= \left[(z^2 + \frac{1}{2})\tau - 2z \cos \tau - \frac{1}{4} \sin 2\tau \right]_{\tau_2}^{\tau_1} \\ &= (z^2 + \frac{1}{2})(\pi - 2 \arcsin(z)) - 3 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2} \\ \int_{\tau_2}^{\tau_1} g(\tau) \cdot \sin \tau d\tau &= \left[-(z^2 + 1) \cos \tau + z\tau - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \sin 2\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \cos^3 \tau \right]_{\tau_2}^{\tau_1} \\ &= -\frac{2}{3}(z^2 + 2) \sqrt{1 - z^2} + z(\pi - 2 \arcsin(z)) \\ \int_{\tau_2}^{\tau_1} g(\tau) \cdot \cos \tau d\tau &= \frac{1}{3} \cdot [(z + \sin \tau)^3]_{\tau_2}^{\tau_1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |Re_0 + Re_1 \sin \tau| (Re_0 + Re_1 \sin \tau) d\tau &= 2 \cdot Re_1^2 \cdot [(2z^2 + 1) \arcsin(z) + 3z\sqrt{1 - z^2}] \\ \int_{-\pi}^{\pi} |Re_0 + Re_1 \sin \tau| (Re_0 + Re_1 \sin \tau) \cdot \sin \tau d\tau &= 4 Re_1^2 \cdot \left[z \cdot \arcsin(z) + \frac{1}{3}(z^2 + 2)\sqrt{1 - z^2} \right] \\ \int_{-\pi}^{\pi} |Re_0 + Re_1 \sin \tau| (Re_0 + Re_1 \sin \tau) \cdot \cos \tau d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Anhang B

Für $z^2 < 1$ können folgende Funktionen in eine Reihe entwickelt werden :

$$\underline{\text{arc sin}}(z) = z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} z^5 + \dots$$

$$\sqrt{1 - z^2} = 1 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 - \dots$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot z^2 + 1) \underline{\text{arc sin}}(z) + 3z \sqrt{1 - z^2} &= z + 2z^3 + \frac{1}{2 \cdot 3} z^5 + \dots \\ &+ 3z - \frac{3}{2} z^3 - \frac{3}{8} z^5 - \dots \\ &= 4z + \frac{2}{3} z^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \cdot \underline{\text{arc sin}}(z) + \frac{1}{3}(z^2 + 2) \sqrt{1 - z^2} &= z^2 + \frac{1}{6} z^4 + \frac{3}{40} z^6 + \dots \\ &+ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{6} z^4 - \dots \\ &= \frac{2}{3} + z^2 + \dots \end{aligned}$$

Näherungsweise gilt somit für kleine Werte $z = \text{Re}_0 / \text{Re}_1$

$$(2z^2 + 1) \cdot \underline{\text{arc sin}}(z) + 3z \sqrt{1 - z^2} \approx 4 \frac{\text{Re}_0}{\text{Re}_1} \quad (\text{B.1})$$

$$z \cdot \underline{\text{arc sin}}(z) + \frac{1}{3}(z^2 + 2) \sqrt{1 - z^2} \approx \frac{2}{3} \quad (\text{B.2})$$

Lebenslauf

- 1940 am 23. März in Schwelm geboren als Sohn des
Ingenieurs Willi Schöneborn und seiner Ehefrau
Else, geb. Hallen
- 1946- Besuch der Volksschule in Schwelm
1951 und Ennepetal-Milspe
- 1951- Besuch des Mathematisch-naturwissenschaftlichen
1957 Progymnasiums Ennepetal; Abschluß mit OII-Reife
- 1957- Praktikant bei der Firma Aug. Bilstein GmbH
1959 Ennepetal-Altenvoerde
- 1959- Studium an der Staatlichen Ingenieurschule
1962 Hagen mit Ingenieur-Examen am 21.2.62;
Entwicklungsingenieur bei der Firma Gebr. Winkel-
straeter GmbH Wuppertal
- 1962- Studium an der Universität Karlsruhe mit Diplom-
1968 Hauptprüfung in der Fachrichtung Verfahrenstechnik
am 19. 10. 67;
Farbenfabriken Bayer Leverkusen
- seit zunächst als wissenschaftlicher Mitarbeiter,
1.7. 1968 dann als wissenschaftliche Hilfskraft, ab 1.1. 70
als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für
Mechanische Verfahrenstechnik der Universität
Erlangen - Nürnberg

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
